

Cost by the



علم ہندوستانی

بمقام

اسٹریڈیٹ

نعمت الله علی

علاء

سید محمد



سلسلہ کتب علمیہ علامہ محمد علی شاہ

علم ہندو

(سکول جامہری حصہ پنجم، مال اینڈ سٹینوز)

برائے ایف اے

مترجمہ

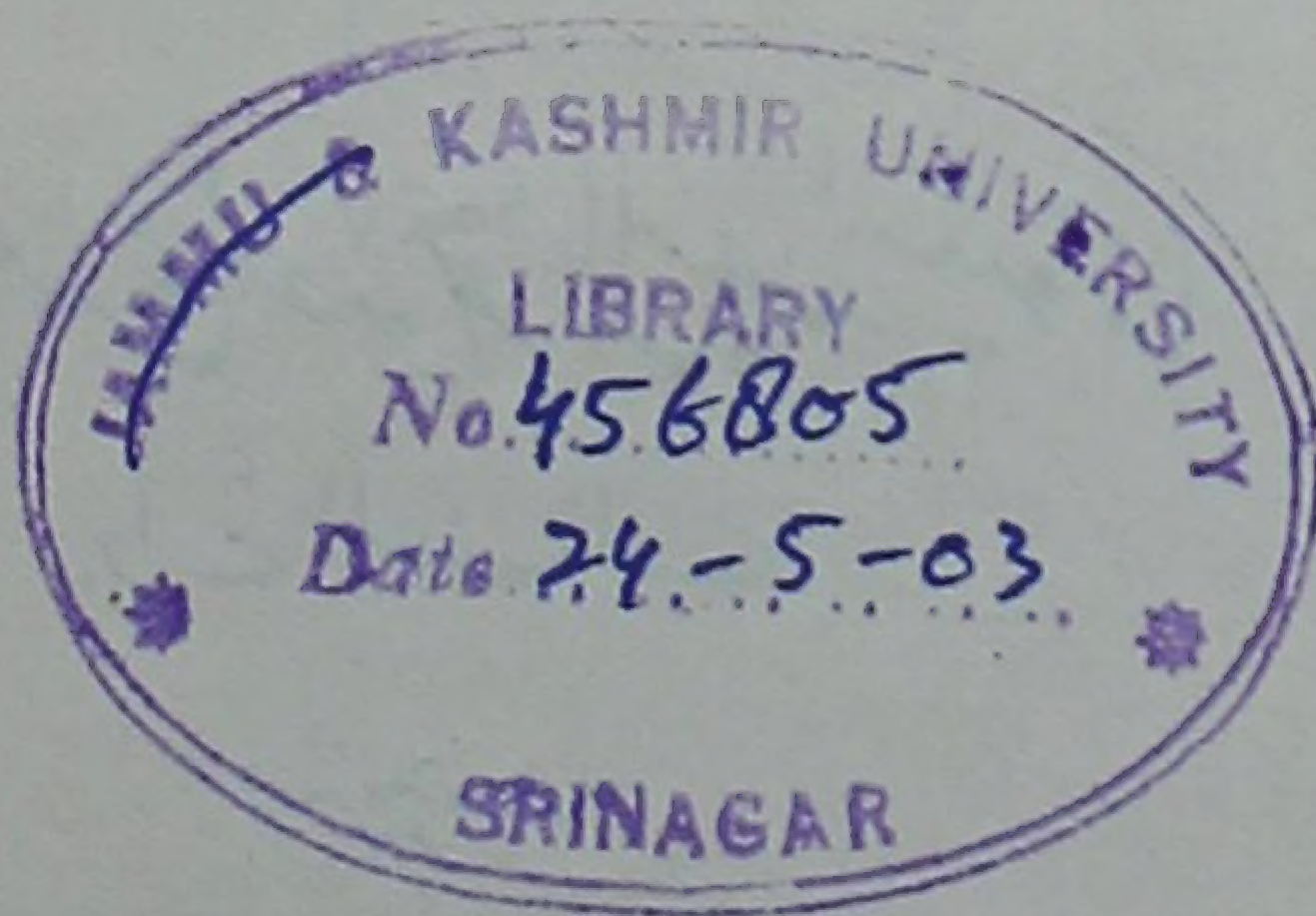
قاضی محمد حسین صاحب - ایف اے

پروفیسر ریاضی جامعہ عثمانیہ حیدرآباد دکن

۱۳۵۹ھ ۱۳۲۹ھ ۱۹۴۰ء

طبع ثانی

الطبع علامہ محمد علی شاہ



516.1

E 14 2

فہرستِ سائین

ہندوستانی (ہال اینڈ سٹیوٹن) حصہ پنجم

صفحہ	مضمون
	تناسب
۱	تعریفات اور ابتدائی اصول
۳	تمہیدی مسائل ۱ تا ۶
	خطوطِ مستقیم کی تناسبی تقسیم
۱۰	مسئلہ اثباتی ۶۰ [اقلیدس م ۶ ش ۲] اگر ایک خطِ مستقیم مثلث کے کسی ایک ضلع کے متوازی کھینچا جائے تو یہ باقی دو اضلاع کو یا اضلاعِ مخروجه کو ایک ہی نسبت سے تقسیم کرتا ہے۔
	مسئلہ اثباتی ۶۱ [اقلیدس م ۶ ش ۳ اور ۴] اگر مثلث کے راسی زاویہ کو داخل یا خارجاً تنصیف کیا جائے تو تنصیف کرنے والا خط (منصف) قاعدہ کو داخل یا خارجاً ایسے حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن کی نسبت باقی اضلاع کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔
	برعکس اس کے اگر قاعدہ کو داخل یا خارجاً ایسے حصوں میں تقسیم کیا جائے جن کی نسبت مثلث کے باقی اضلاع کی نسبت کے مساوی

مضمون

صفحہ

ہو تو نقاط تقسیم کو راس کے ساتھ ملانے والا خط راسی زاویہ کی داخلا یا خارجاً
تصفیف کرتا ہے۔

۱۲

متساوی الزوایا مثلث

مسئلہ اثباتی ۶۲ [اقلیدس ص ۶ ش ۴] اگر دو مثلث
متساوی الزوایا ہوں تو ان کے متناظر اضلاع متناسب ہوتے ہیں۔

۱۸

مسئلہ اثباتی ۶۳ [اقلیدس ص ۶ ش ۵] اگر دو مثلثوں کے
ضلع متناسب ہوں جب کہ انہیں ایک ہی ترتیب میں لیا جائے تو مثلث
متساوی الزوایا ہونگے اور ان کے وہ زاویے مساوی ہونگے جو متناظر اضلاع
کے سامنے ہیں۔

۱۹

مسئلہ اثباتی ۶۴ [اقلیدس ص ۶ ش ۶] اگر دو مثلث
ایسے ہوں کہ ایک مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے
مساوی ہو اور مساوی زاویوں کے گرد کے اضلاع متناسب ہوں تو مثلث
متشابه ہونگے۔

۲۵

مسئلہ اثباتی ۶۵ [اقلیدس ص ۶ ش ۷] دو مثلثوں میں
سے ایک کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے مساوی ہے،
نیز پہلے مثلث کے کسی دوسرے زاویہ کے گرد کے اضلاع دوسرے مثلث کے
متناظر اضلاع کے متناسب ہیں، ثابت کرو کہ تیسرے زاویے یا تو مساوی
ہیں یا ایک دوسرے کے مکمل (یعنی ان کا مجموعہ ۱۸۰ ہے) اور پہلی صورت
میں مثلث متشابه ہیں۔

۲۷

مسئلہ اثباتی ۶۶ [اقلیدس ص ۶ ش ۸] مثلث
قائم الزاویہ میں زاویہ قائمہ سے وتر پر عمود نکالا گیا ہے، ثابت کرو کہ

مضمون

صفحہ

اس کے دونوں طرف جو دو مثلث بنتے ہیں وہ کل مثلث کے متشابه، نیز آپس میں بھی متشابه ہیں۔

۳۰

۳۲

۳۴

مثلثی نسبتیں۔
بعض ہندسی نتائج کو علم مثلث کے طریق پر بیان کیا گیا ہے۔

عملی مسائل

مسئلہ عملی ۳۵۔ تین دیے ہوئے خطوط مستقیم کا چوتھا تناسب

۳۹

معلوم کرو۔
مسئلہ عملی ۳۶۔ دو دیے ہوئے خطوط مستقیم کا تیسرا تناسب

۴۰

معلوم کرو۔
مسئلہ عملی ۳۷۔ ایک خط مستقیم کو داخلاً اور خارجاً ایک دی ہوئی نسبت سے تقسیم کرو۔

۴۰

مسئلہ عملی ۳۸۔ دو دیے ہوئے خطوط مستقیم کے درمیان وسط تناسب دریافت کرو۔

۴۲

متشابه اشکال

مسئلہ اثباتی ۴۷۔ متشابه کثیر الاضلاع متشابه مثلثوں کی ایک ہی تعداد میں تقسیم ہو سکتے ہیں اور ہر شکل میں متناظر راسوں کو جو خط ملائے ہیں وہ متناسب ہوتے ہیں۔

۴۸

مسئلہ عملی ۴۹۔ ایک ضلع پر جس کا طول معلوم ہے ایک شکل بناؤ جو ایک معلوم مستقیم الاضلاع شکل کے متشابه ہو۔

۵۰

مسئلہ اثباتی ۵۸۔ کوئی دو متشابه مستقیم الاضلاع اشکال اس طرح رکھی جاسکتی ہیں کہ متناظر راسوں کے ملائے والے خط ایک ہی

صفحہ	مضمون
۵۱	نقطہ میں سے گزریں۔ مسئلہ اثباتی ۶۹ [اقطیدس م ۶ ش ۳۳] مساوی
۵۵	دائرہ میں مرکز پر کے یا محیط پر کے زاویوں کی باہمی نسبت وہی ہوتی ہے جو ان قوسوں کی نسبت ہو جن پر وہ قائم ہوں۔
	تناسب رقبوں سے متعلق
۵۷	مسئلہ اثباتی ۷۰ [اقطیدس م ۶ ش ۱] جن مثلثوں کے
۵۷	ارتفاع مساوی ہوں ان کے رقبوں میں وہی نسبت ہوتی ہے جو ان کے
۶۰	قاعدوں میں۔ مسئلہ اثباتی ۷۱۔ اگر دو مثلثوں میں ایک کا ایک زاویہ دوسرے
۶۳	کے ایک زاویہ کے مساوی ہو تو ان کے رقبے مساوی زاویوں کے گرد کے اضلاع کی
۶۶	سطحوں کے متناسب ہوتے ہیں۔ مسئلہ اثباتی ۷۲ [اقطیدس م ۶ ش ۱۹] متشابه مثلثوں
۷۱	کے رقبے ان کے متناظر اضلاع کے مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں۔
۷۶	مسئلہ اثباتی ۷۳ [اقطیدس م ۶ ش ۲۰] متشابه
۷۶	کثیرالاضلاعوں کے رقبے ان کے متناظر اضلاع کے مربعوں کے متناسب
۷۶	ہوتے ہیں۔ مسئلہ اثباتی ۷۴ [اقطیدس م ۶ ش ۳۱] مثلث
۷۶	قائم الزاویہ میں کوئی شکل مستقیم الاضلاع وتر پر بنائی گئی ہے، اس کے
۷۶	متشابه باقی دو اضلاع پر متشابه اشکلیں متشابه طور پر بنائی گئی ہیں ثابت
۷۶	کر کہ وتر پر کی شکل باقی دو شکلوں کے مساوی ہے۔
۷۶	مسئلہ عملی ۷۵۔ ایک شکل بناؤ جو ایک دی ہوئی مستقیم الاضلاع
۷۶	شکل کے متشابه ہو اور اس کے رقبہ کی کسی معلومہ کسر کے مساوی ہو۔

صفحہ	مضمون
	دائروں سے متعلق سطحیں
	مسئلہ اشباتی ۵۷ [اقلیدس ص ۳ ش ۳۵ اور ۳۶]
۷۶	دائرہ کے کوئی دو وتر ایک دوسرے کو داخل یا خارجاً قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ ایک وتر کے حصوں کی سطح دوسرے وتر کے حصوں کی سطح کے مساوی ہے۔
۷۷	نتیجہ صریح۔ اگر کسی بیرونی نقطہ سے دائرہ کا قاطع اور مماس دونوں کھینچے جائیں تو قاطع اور قاطع کے اس حصہ کی سطح جو دائرہ کے باہر ہے مماس کے مربع کے مساوی ہوتی ہے۔
۷۹	مسئلہ اشباتی ۷۶۔ مثلث کے راسی زاویہ کو ایک خط مستقیم سے تقصیف کیا گیا ہے جو قاعدہ کو کاٹتا ہے، ثابت کرو کہ اضلاع کی سطح قاعدہ کے حصوں کی سطح اور منقبت کے مربع کے مجموعہ کے مساوی ہے۔
۸۰	مسئلہ اشباتی ۷۷۔ مثلث کے راسی زاویہ سے قاعدہ پر عمود ڈکا گیا ہے، ثابت کرو کہ اضلاع کا حاصل ضرب اس عمود اور مثلث کے حائطہ دائرہ کے قطر کی سطح کے مساوی ہے۔
۸۱	مسئلہ اشباتی ۷۸ [بطلمیوس کا مسئلہ] ایک ذواربعتہ الاضلاع (چار ضلعی) دائرہ کے اندر بن سکتی ہے، اس کے قطروں کی سطح اس کے مقابل کے اضلاع کی سطحوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔
	متفرق مسائل اور مثالیں
۹۲	دائرے کھینچنے کے چند عمل۔
۹۶	اعظم اور اقل قیمتیں۔
۱۰۳	ترسیمیں۔ اعظم اور اقل قیمتیں معلوم کرنے میں ان کا استعمال۔

مضمون

صفحہ

۱۱۰	موسیقی تقسیم -
۱۱۸	مشابہت تہ کے مرکز -
۱۲۲	قطب اور قطبی -
۱۲۹	بنیادی محور -
۱۳۵	تقلیب -
۱۴۱	سیوا کا مسئلہ -
۱۴۳	مینی لاس کا مسئلہ -
۱۴۷	جوابات -

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ہندسہ مستوی (ہال اینڈ اسٹیوونز)

حصہ پنجم

تعریفیں اور ابتدائی اصول

۱۔ ایک مقدار کو دوسری ہم جنس مقدار کے ساتھ جو رشتہ ہو لحاظ بڑا چھوٹا ہونے کے اس کو نسبت کہتے ہیں۔ ان مقادیر کا مقابلہ آپس میں یہ دیکھنے سے کیا جاتا ہے کہ ایک مقدار دوسری مقدار کا کتنا ضعف یا کسرا ہے۔ اس ضعف یا کسر کو ہم نسبت کا ناپ مقرر کرتے ہیں۔

پس اگر ایسی دو مقداروں میں بالترتیب A اور B اکائیاں شامل ہوں تو یہی A کی نسبت دوسری کے ساتھ کسر $\frac{A}{B}$ سے تعبیر ہوگی۔

A اور B کی نسبت کو بالعموم اس طرح لکھتے ہیں $A : B$ ، A کو نسبت کا مقدم اور B کو موخر کہتے ہیں۔

یہ ضروری ہے کہ نسبت میں جن دو مقداروں کا مقابلہ کیا جائے وہ ایک ہی جنس کی ہوں مثلاً دونوں خطوط ہوں یا دونوں زاویے یا دونوں رقبے، کیونکہ یہ صریحاً ناممکن ہے کہ ایک خط مستقیم کے طول کا مختلف قسم کی مقدار مثلاً مثلث کے رقبہ کے ساتھ مقابلہ کیا جائے، نیز یاد رہے کہ نسبت ایک عدد (یا کسر) مجرد ہے مثلاً $\frac{1}{2}$ یا $\frac{3}{4}$ جو نسبت $\frac{1}{2}$ سنتی میٹر لمبے خط کو جو نسبت $\frac{3}{4}$ سنتی میٹر لمبے خط کے ساتھ ہے وہ محض $\frac{3}{2}$ یا $\frac{3}{4}$ ہے (اور

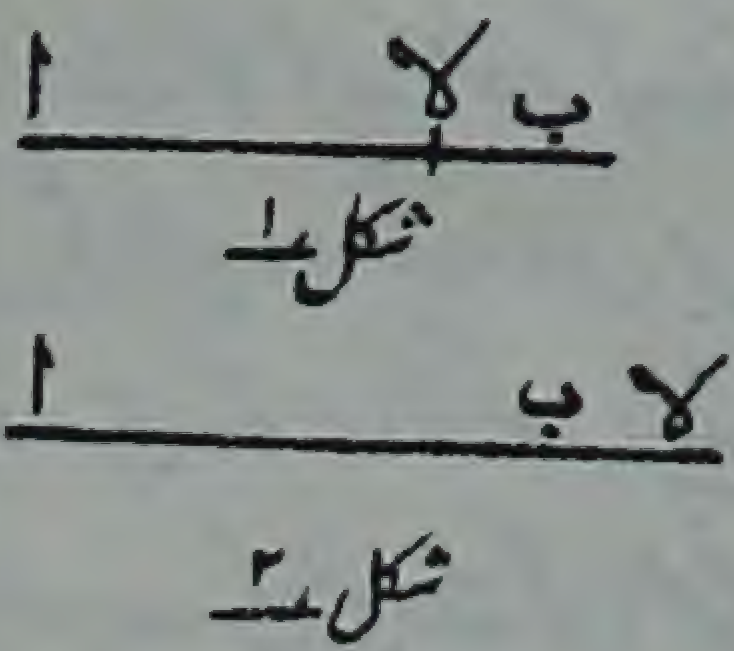
۳۔ سنتی میٹر نہیں ہے)

نوٹ۔ اگر ایک ہی جنس کی دو مقداریں ہوں تو یہ ہمیشہ ممکن نہیں ہوتا کہ ان دونوں کو ایک مشترک اکائی کی رقوم میں بیان کیا جاسکے۔ مثلاً اگر مربع کا ضلع ۱ انچ ہو تو اس کا قطر ۲۶ انچ ہوگا۔ لیکن ۲۶ کی عددی قیمت ٹھیک طور پر نہیں نکل سکتی (اگرچہ اعشاریہ کے جتنے ہندسوں تک ہم اسے نکالنا چاہیں نکال سکتے ہیں) اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مربع کا ضلع اور قطر جو ایک ہی قسم کی دو مقداریں ہیں کسی ایک ہی اکائی کی رقوم میں دونوں صحیح طور پر بیان نہیں ہو سکتیں۔ ایسی دو مقداروں کو متبائن کہتے ہیں۔ لیکن اکائی کو کافی طور پر چھوٹا منتخب کرنے سے ہم دو متبائنوں کو اس کی رقوم میں کسی مطلوبہ درجہ صحت تک باسانی بیان کر سکتے ہیں۔ مثلاً ۲۶ انچ اور ۱ انچ کی صورت میں ہم جانتے ہیں کہ

$$۲۶ = ۱۴۱۴۲۱۰۰۰۰ \text{ اس لیے } ۲۶ \text{ انچ اور } ۱ \text{ انچ ذیل کے عددوں سے تعبیر ہو سکتے ہیں}$$

۱۴۱۴ اور ۱۰۰۰، معمولی اندازہ، جب کہ $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ اکائی ہو۔

۱۴۱۴ اور ۱۰۰۰۰، زیادہ اچھا اندازہ، جب کہ $\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$ اکائی ہو وغیرہ



۲۔ خط مستقیم اب پر
یا اب مدودہ پر کوئی نقطہ لا
لیا گیا ہے، اب جس نسبت سے
لا خط اب کو تقسیم کرتا ہے اس سے
مراد اب کے حصوں کی نسبت ہے
یعنی لا:لا ب خواہ تقسیم
اندرونی ہو جیسے شکل ۱ میں
یا بیرونی ہو جیسے شکل ۲ میں۔

۳۔ چار مقداریں متناسب میں کہلاتی ہیں جب کہ پہلی کو دوسری
کے ساتھ وہی نسبت ہو جو تیسری کو چوتھی کے ساتھ ہے۔
اگر ا کو ب سے وہی نسبت ہو جو لا کو ما سے ہے تو یہ چاروں مقداریں
متناسب کہلاتی ہیں ربط متناسب کو یوں لکھتے ہیں:

$$\frac{ا}{ب} = \frac{لا}{ما}$$

$$ا : ب = لا : ما$$

یا اور اس کو پڑھتے اس طرح میں ”ا کو ب سے وہی نسبت ہے جو لا کو ما سے ہے“
اور ما طرفین تناسب میں اور ب اور لا وسطین - ما کو
ا، ب اور لا کا چوتھا تناسب کہتے ہیں۔

کسی تناسب میں، ایسی رقموں کو جو دونوں مقدم ہوں یا دونوں موخر ہوں
ہم متساظر رقمیں کہینگے۔

نوٹ - کسی تناسب میں (مثلاً ا : ب = لا : ما میں) ہر نسبت کی مقدار
ایک ہی قسم کی ہونی چاہییں، اگرچہ یہ ضروری نہیں کہ دوسری نسبت کی مقداریں اسی قسم
کی ہوں جس قسم کی کہ پہلی نسبت کی مقداریں ہیں۔ مثلاً ایسا ہو سکتا ہے کہ ا اور ب
دونوں رقبے ہوں اور لا اور ما دونوں خطوط - اور اس صورت میں تناسب کے یہ
معنی ہونگے کہ پہلے رقبہ کو دوسرے رقبہ کے ساتھ وہی نسبت ہے جو پہلے خط کو دوسرے
خط کے ساتھ ہے۔

۴۔ ایک ہی قسم کی تین مقداریں تناسب کہلاتی ہیں اگر پہلی کو دوسری
کے ساتھ وہی نسبت ہو جو دوسری کو تیسری کے ساتھ ہے۔
مثلاً ا، ب، ج باہم تناسب ہونگے اگر

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ج}$$

$$ا : ب = ب : ج$$

یہاں ب کو ا اور ج کا وسط تناسب کہتے ہیں۔
ج، ا اور ب کا تیسرا تناسب کہلاتا ہے۔

اور

علوم متعارفہ

(۱) جو نسبتیں ایک ہی نسبت کے مساوی ہوں وہ ایک

دوسرے کے مساوی ہوتی ہیں۔

مثلاً اگر $ا : ب = لا : ما$ اور $ج : د = لا : ما$

تو ظاہر ہے کہ $ا : ب = ج : د$

(۲) جو مقداریں ایک ہی مقدار کے ساتھ وہی نسبت رکھیں وہ باہم مساوی ہوتی ہیں۔

مثلاً اگر $ا : لا = ب : لا$

تو $ا = ب$

ابتدائی مسائل

۱۔ اگر چار مقداریں متناسب ہوں تو وہ متناسب رہیں گی اگر انہیں بالعکس لیا جائے۔

یعنی اگر $ا : ب = لا : ما$

تو یہ دیکھنا ہے کہ $ب : ا = ما : لا$

مفروض کی بنیاد پر $\frac{ا}{ب} = \frac{لا}{ما}$ اس لیے $\frac{ب}{ا} = \frac{ما}{لا}$

یعنی $ب : ا = ما : لا$

۲۔ اگر ایک ہی قسم کی چار مقداریں متناسب ہوں تو وہ متناسب رہیں گی اگر ان کو متبادلاً لیا جائے۔

یعنی اگر $ا : ب = لا : ما$

تو یہ دیکھنا ہے کہ $ا : لا = ب : ما$

مفروض کی بنیاد پر $\frac{ا}{لا} = \frac{ب}{ما}$

طرفین کو $\frac{ا}{ب} = \frac{لا}{ما}$ کے ساتھ ضرب دینے سے

$$\frac{ب}{ا} = \frac{۱}{لا} \text{ یعنی } \frac{ب}{لا} \times \frac{لا}{ا} = \frac{ب}{لا} \times \frac{۱}{ا}$$

یعنی $ا : لا = ب : ا$

نوٹ - اس مسئلہ میں مفروض کی بنا پر $ا$ اور $ب$ کو ایک ہی قسم کی مقداریں ہونا چاہیے، نیز $لا$ اور $ا$ کو ایک ہی قسم کی مقداریں ہونا چاہیے۔ نتیجہ کی رو سے $ا$ اور $لا$ کا ایک ہی قسم کی مقداریں ہونا ضروری ہے، نیز $ب$ اور $ا$ کو ایک ہی قسم کی مقداریں ہونا چاہیے۔

۳۔ اگر چار عدد متناسب ہوں تو طرفین کا حاصل ضرب وسطین کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

$$ا : ب = ج : د$$

$$ا د = ب ج$$

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$$

یعنی اگر

تو ثابت کرنا ہے کہ

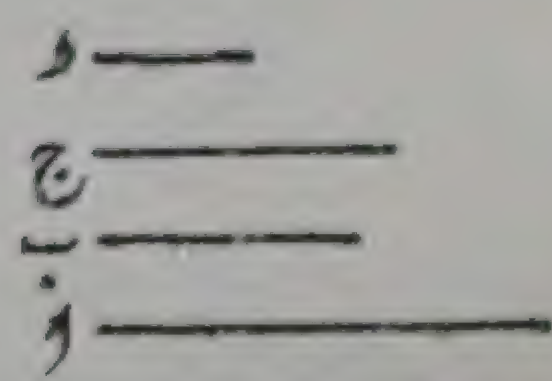
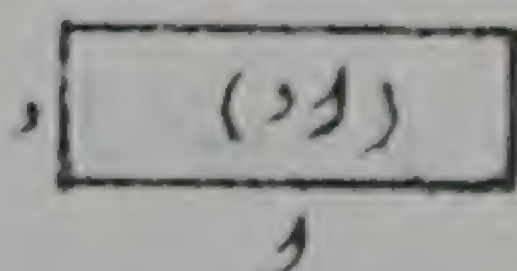
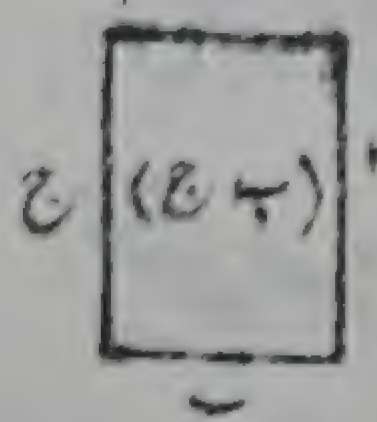
مفروض کی بنا پر

اس مساوات کے ہر طرف $ب د$ کے ساتھ ضرب دینے سے

$$ا د = ب ج$$

نتیجہ صریح - اگر چار خطوط مستقیم جن کے طول $ا$ ، $ب$ ، $ج$ ، $د$ ہیں تناسب میں ہوں تو اوپر کے نتیجہ کی رو سے طرفین کی سطح وسطین کی سطح کے مساوی ہوتی ہے۔

ذیل کی شکل میں اس کی توضیح کی گئی ہے:



اسی طرح سے اگر تین خطوط مستقیم $و$ ، $ب$ ، $ج$ تناسب ہوں،

$$و : ب = ب : ج$$

یعنی اگر

$$و ج = ب^2$$

تو

یعنی طرہین کی سطح وسط تناسب کے مربع کے مساوی ہے۔

۴۔ اگر چار مقداریں تناسب میں ہوں تو پہلی ۲ اور دوسری کے

مجموعہ (یا فرق) کو دوسری کے ساتھ وہی نسبت ہوگی جو تیسری ۱ اور چوتھی کے مجموعہ (یا فرق) کو چوتھی کے ساتھ ہے۔

یعنی اگر

$$و : ب = لا : ما$$

$$(۱) \quad و + ب : ب = لا + ما : ما$$

$$(۲) \quad و - ب : ب = لا - ما : ما$$

مفروض کی بنا پر

$$\frac{و}{ب} = \frac{لا}{ما}$$

$$اس لیے \quad \frac{و}{ب} + ۱ = ۱ + \frac{لا}{ما} \quad یعنی \quad \frac{و + ب}{ب} = \frac{لا + ما}{ما}$$

یعنی

$$(۱) \quad و + ب : ب = لا + ما : ما$$

اس نتیجہ کو بعض اوقات ترکیب نسبت کے نام سے موسوم کرتے ہیں۔

اسی طرح مساوی نسبتوں $\frac{و}{ب}$ اور $\frac{لا}{ما}$ سے ایک تفریق کرنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{و - ب}{ب} = \frac{لا - ما}{ما}$$

یعنی

$$(۲) \quad و - ب : ب = لا - ما : ما$$

اس نتیجہ کو بعض اوقات تفصیل نسبت کہتے ہیں۔

نتیجہ صریح۔ اگر $و : ب = لا : ما$

$$و + ب : و - ب = لا + ما : لا - ما$$

تو

نتیجہ (۱) کو نتیجہ (۲) پر تقسیم کرنے سے یہ حاصل ہوگا۔

۵۔ مساوی نسبتوں کا ایک سلسلہ دیا ہوا ہے (سب مقداریں ایک ہی قسم کی ہیں) کسی نسبت کے مقدم کو اپنے موخر کے ساتھ وہی نسبت ہوگی جو سب مقدموں کے مجموعہ کو سب موخروں کے مجموعہ کے ساتھ ہے۔

$$\text{یعنی اگر } \frac{1}{a} = \frac{b}{a} = \frac{c}{y} = \dots$$

$$\text{تو دیکھنا ہے کہ } \frac{1 + b + c + \dots}{1 + a + y + \dots} = \frac{1}{a}$$

فرض کرو کہ مساوی نسبتوں $\frac{1}{a}, \frac{b}{a}, \frac{c}{y}, \dots$ میں سے ہر ایک م کے مساوی ہے۔

اس طرح $1 = m \cdot a, b = m \cdot a, c = m \cdot y, \dots$
جمع کرنے سے $1 + b + c + \dots = m(1 + a + y + \dots)$

$$\text{اس لیے } \frac{1}{a} = m = \frac{1 + b + c + \dots}{1 + a + y + \dots}$$

$$\text{یعنی } 1 : a = 1 + b + c + \dots : 1 + a + y + \dots$$

۶۔ ایک خط مستقیم کسی معلومہ نسبت سے داخل، ایک اور صرف ایک نقطہ پر تقسیم ہو سکتا ہے، اسی طرح خارجاً صرف ایک نقطہ پر تقسیم ہو سکتا ہے۔

$$\frac{a : b :: c : d}{\text{شکل ۱}}$$

$$\frac{a : b :: c : d}{\text{شکل ۲}}$$

فرض کرو کہ اب خط معلومہ ہے اور م : ن دی ہوئی نسبت ہے جس میں م بڑا ہے ن کو

داخلی تقسیم۔ (۱) اب کو (م + ن) مساوی حصوں میں تقسیم کرو
(شکل ۱) [مسئلہ عملی] ان میں سے م حصے الگ ہو جو فرض کرو کہ ا لا میں شامل
ہوتے ہیں اور ن حصے لا ب میں۔

اس طرح $ا : لا : اب = م : ن$

یعنی اب کی نقطہ لا پر داخل معلومہ نسبت میں تقسیم ہوتی ہے۔

(۲) نیز چونکہ ا لا اور اب میں بالترتیب م اور م + ن مساوی حصے
شامل ہوتے ہیں، اس لیے

$ا : اب = م : م + ن$

اسی طرح سے اگر کوئی نقطہ ق خط اب کو نسبت م : ن سے تقسیم

کرتا ہو تو لازماً

$اق : اب = م : م + ن$

اس لیے $\frac{اق}{اب} = \frac{ا}{اب}$ اس لیے $اق = ا$

اس لیے ق اور لا ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں یعنی لا صرف
ایک ہی نقطہ ہے جس پر اب کی داخل نسبت م : ن سے تقسیم ہوتی ہے۔
خارجی تقسیم۔ (۱) اب کو (م - ن) مساوی حصوں میں
تقسیم کرو (شکل ۲) اور اب کو لا تک اتنا بڑھاؤ کہ ا لا میں م ایسے حصے
شامل ہوں، تب ب لا میں ن ایسے حصے شریک ہوں گے۔

اس طرح $ا : ب : لا = م : ن$

یعنی اب نقطہ لا پر خارجاً معلومہ نسبت میں تقسیم ہوتا ہے۔

(۲) اور حسبِ بالا ہم اسے ثابت کر سکتے ہیں کہ لا صرف ایک ہی نقطہ ہے

جو اب کو خارجاً نسبت م : ن سے تقسیم کرتا ہے۔

مشقیں

۱۔ ذیل کے تناسبوں میں جو قہیں موجود نہیں انہیں مندرج کرو۔

$$(1) \quad 3 : 4 = 15 : ()$$

$$(2) \quad 5 : 3 = () : 10 = 32$$

$$(3) \quad () : 1 ج = 2 ج : 3 ج$$

۲ - ذیل کے بیان کو درست کرو:

$$۶۵ پونڈ : ۷۸ فٹ = ۲۵ پونڈ : ۳۰ فٹ$$

۳ - ایک خط مستقیم ۶ و ۹ لیا ہے، اس کو داخلہ نسبت ۵ : ۷ سے تقسیم کیا گیا ہے، اس کے حصوں کا طول معلوم کرو۔

۴ - ایک خط مستقیم ۵ و ۴ سنتی میٹر لیا نسبت ۱۱ : ۸ سے خارجاً تقسیم کیا گیا ہے، اس کے حصوں کے طول معلوم کرو۔

۵ - خط مستقیم ۱ ب و ۴ و ۶ سنتی میٹر لیا ہے، اس کو داخلہ لا پر اور خارجاً ۵ : ۳ سے تقسیم کیا گیا ہے، اس کے حصوں کے طول معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ ذیل کے ضابطہ کو پورا کرتے ہیں:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{a+b}$$

۶ - ۱ انچ لیا ایک خط مستقیم داخلہ نسبت م : ن سے تقسیم کیا گیا ہے، ثابت کرو کہ حصوں کے طول بالترتیب ہیں

$$\frac{m}{m+n} \times 1 \text{ انچ}، \frac{n}{m+n} \times 1 \text{ انچ}$$

۷ - ایک خط مستقیم کا طول ۱ اکائیاں ہے، یہ خارجاً نسبت م : ن سے تقسیم کیا گیا ہے، ثابت کرو کہ اس کے حصوں کے طول بالترتیب

$$\frac{m}{m-n} \times 1 \text{ اکائیاں}، \frac{n}{m-n} \times 1 \text{ اکائیاں ہیں۔}$$

۸ - اگر ۱ : ۲ = ۳ : ۴ اور ۲ : ۳ = ۵ : ۶ تو ثابت کرو کہ ۱ : ۳ = ۴ : ۵

۹ - اگر ۱ : ۲ = ۳ : ۴ اور ۲ : ۳ = ۵ : ۶ تو ثابت کرو کہ ۱ : ۳ = ۴ : ۵

۱۰ - ۱، ۲، ۳، ۴ تین متناسب ہیں، ثابت کرو کہ ۱ : ۲ = ۳ : ۴

۱۱۔ اگر دو خطوط مستقیم AB اور CD ایک ہی نسبت سے بالترتیب A اور C پر داخل تقسیم کیے جائیں تو ثابت کرو کہ

$$(۱) AB : AC = DB : CE$$

$$(۲) AB : AC = AD : CE$$

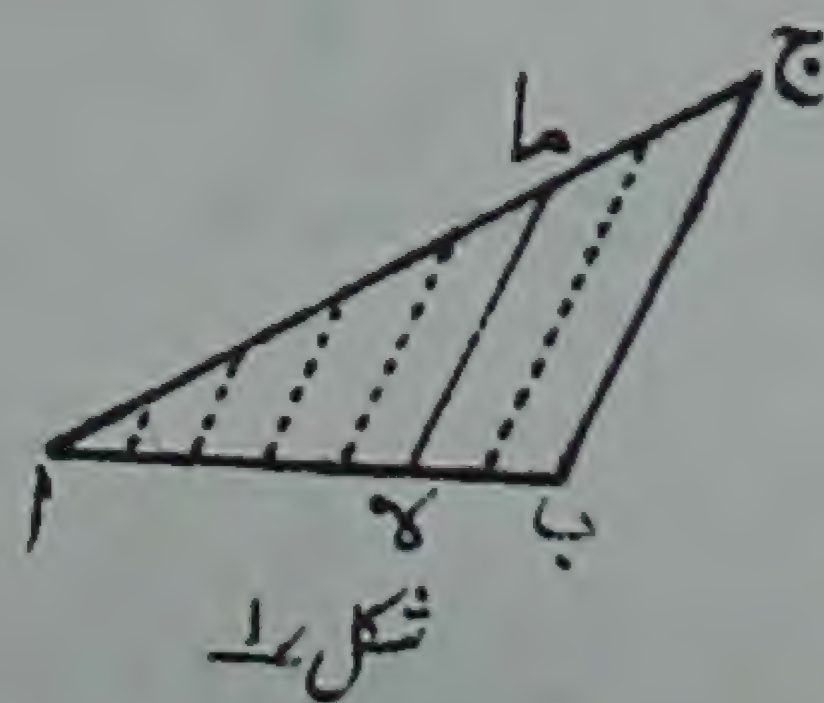
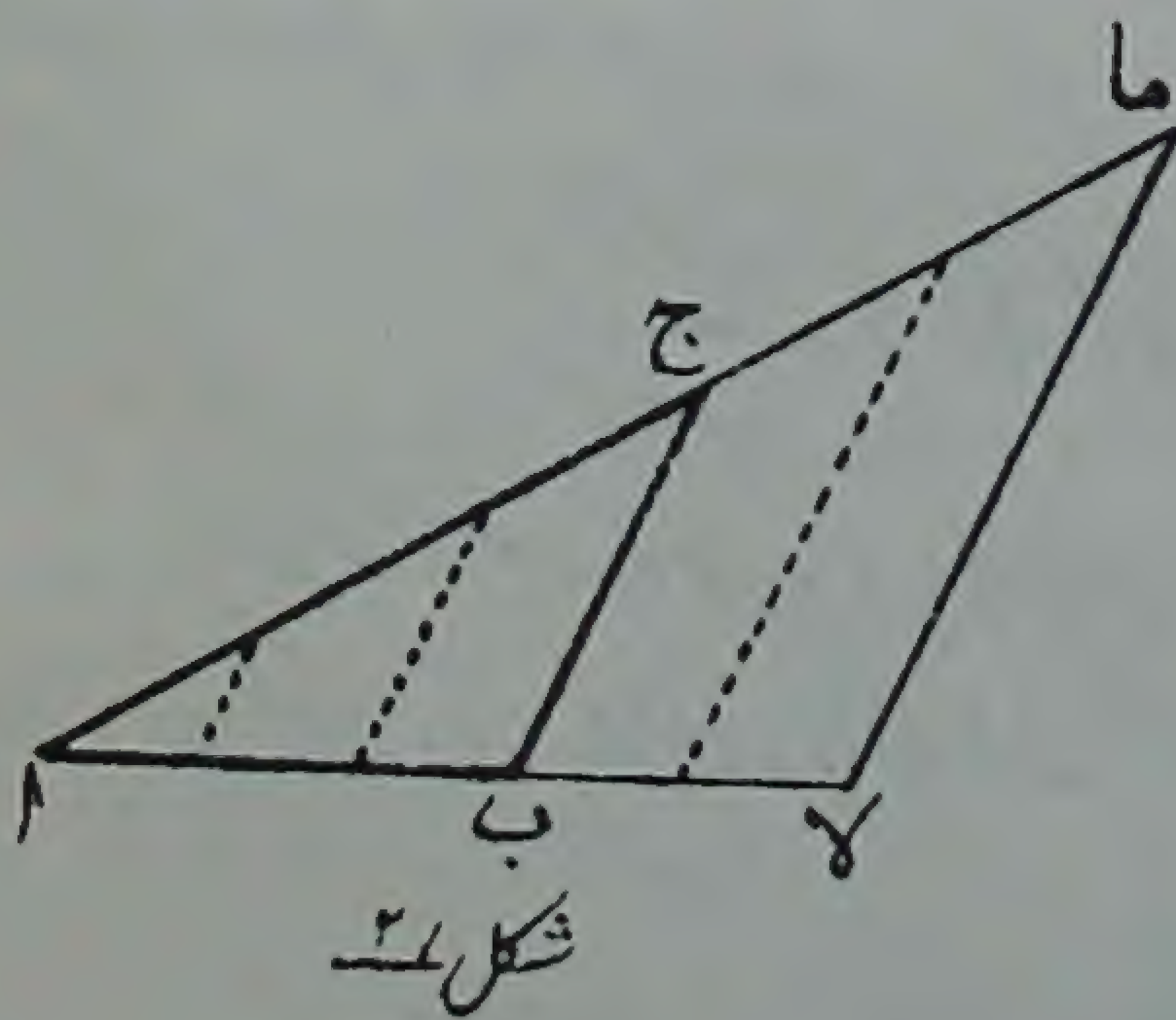
۱۲۔ اگر AB ، BC ، CD چار خط ایسے ہیں کہ A اور D پر کی سطح AB اور C پر کی سطح کے مساوی ہے، ثابت کرو کہ

$$AB : BC = CD : DE$$

خطوط مستقیم کی تناسبی تقسیم

مسئلہ اثباتی ۶۰ [اقلیدس ص ۶، شش ۱۲]

اگر ایک خط مستقیم مثلث کے کسی ضلع کے متوازی کھینچا جائے تو یہ باقی دو اضلاع کو یا اضلاع منخرجہ کو ایک ہی نسبت سے تقسیم کرتا ہے۔



فرض کرو کہ مثلث ABC میں خط DE BC کے متوازی کھینچا گیا ہے اور یہ اضلاع AB اور AC کو بالترتیب D اور E پر ملتا ہے۔
داخل تقسیم 1 میں اور خارجاً تقسیم 2 میں۔

یہ ثابت کرنا ہے کہ

$$الا : لاب = اما : ماج$$

ثبوت۔ فرض کرو کہ لا ضلع اب کو نسبت م : ن سے تقسیم کرتا ہے۔

$$الا : لاب = م : ن$$

یعنی فرض کرو کہ
پس اگر اما کو م مساوی حصوں میں تقسیم کیا جائے تو لاب میں ایسے ن
مساوی حصے شامل ہونگے۔

اما اور لاب کے نقاط تقسیم میں سے ب ج کے متوازی خط کھینچو۔

ان متوازیوں سے اما اور ماج پر چھوٹے حصے قطع ہونگے جو سب

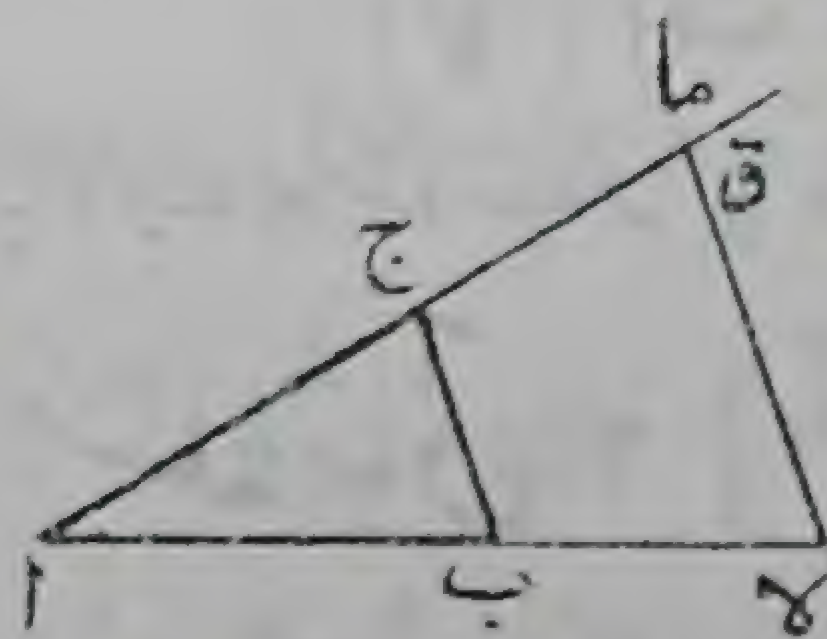
آپس میں مساوی ہونگے۔ مسئلہ اثباتی ۲۲۔

اور ان مساوی حصوں میں سے اما میں م شامل ہونگے اور ماج میں ن۔

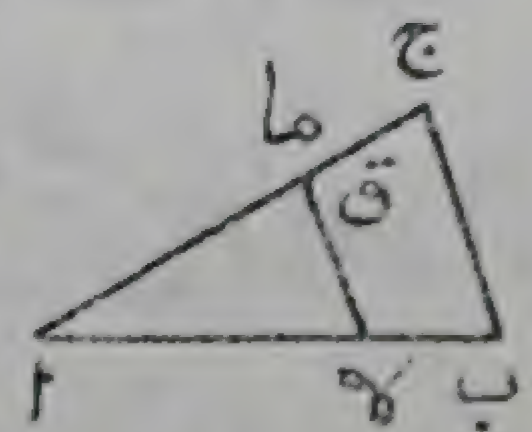
$$اما : ماج = م : ن$$

$$الا : لاب = اما : ماج$$

برعکس اس کے اگر کوئی خط مستقیم مثلث کے دو اضلاع کو
ایک ہی نسبت سے کاٹے تو یہ تیسرے ضلع کے متوازی ہوگا۔



شکل ۱۲



شکل ۱۱

فرض کرو کہ لا اما اضلاع اب، ج کو ایک ہی نسبت سے کاٹتا ہے، یعنی

$$الا : لاب = اما : ماج$$

تو ثابت کرنا مطلوب ہے کہ لا اما ب ج کے متوازی ہے۔

نقطہ لا میں سے لا ق ضلع ب ج کے متوازی کھینچو کہ یہ ج سے ق پر پے۔

تب $اق : ق ج = ا : لا : ب$

لیکن مفروض کی بنیاد پر $اما : ما ج = ا : لا : ب$
پس $ا ج کی ق$ اور $ما پر داخلا$ شکل $ا$ میں اور $خارجاً$ شکل $ب$ میں
ایک ہی نسبت سے تقسیم ہوتی ہے۔

اس لیے $ق$ ، $ما$ پر منطبق ہوتا ہے اور $لاق$ ، $لاما$ پر۔
مسئلہ ۶ صفحہ ۷

یعنی $لاما$ متوازی ہے $ب ج$ کے۔

نتیجہ صریح — اگر $لاما$ ، $ب ج$ کے متوازی ہو تو

$ا : لا : ب = اما : ا ج$

شکل $ا$ سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$ا : لا : ب = م : م + ن$

اس لیے مسئلہ اثباتی ۲۲ سے

$اما : ا ج = م : م + ن$

اس لیے $ا : لا : ب = اما : ا ج$

برعکس اس کے اگر

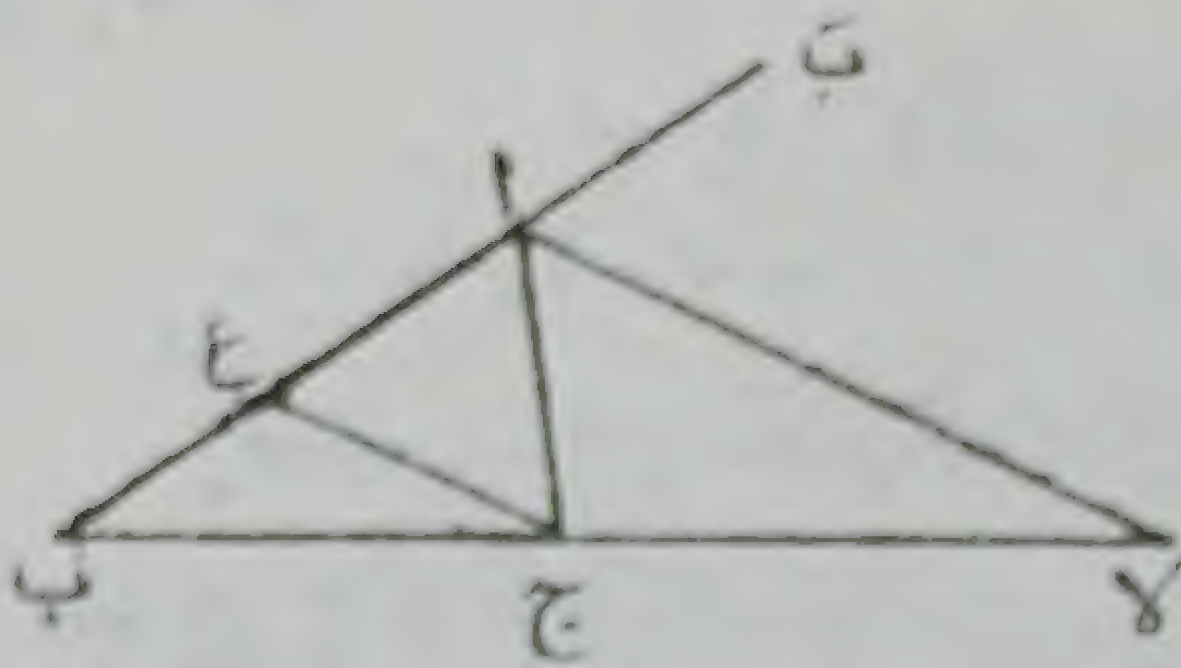
$ا : لا : ب = اما : ا ج$

تو حسبِ بالا یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ $لاما$ متوازی ہے $ب ج$ کے۔

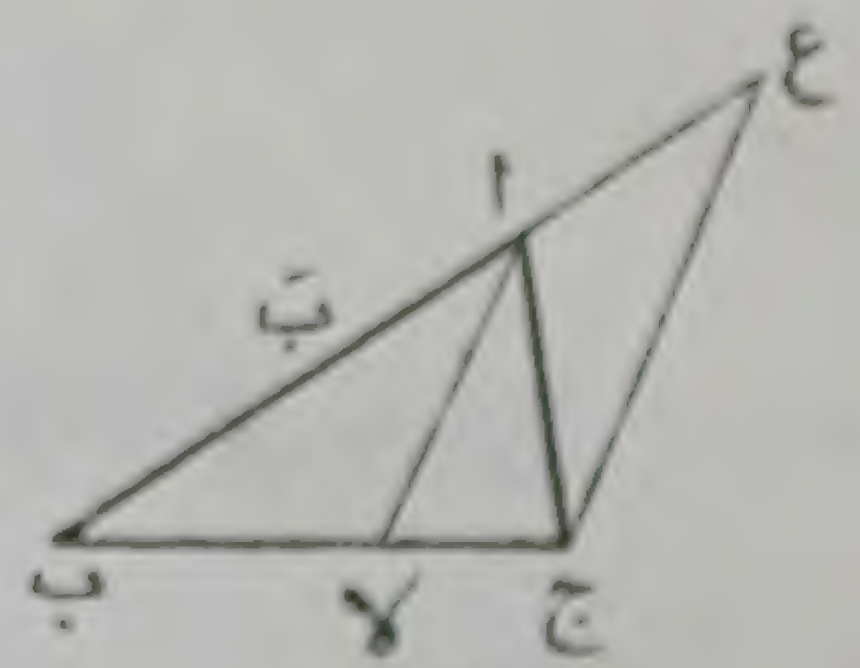
مسئلہ اثباتی ۶۱ [اقلیدس م ۶، ش ۳ اور (۱۰)]

اگر مثلث کے رأسی زاویہ کو $داخلا$ یا $خارجاً$ تنصیف کیا جائے تو
تنصیف کرنے والا خط (منصف) قاعدہ کو $داخلا$ یا $خارجاً$ ایسے حصوں
میں تقسیم کرتا ہے جن کی نسبت باقی اضلاع کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔
برعکس اس کے اگر قاعدہ کو $داخلا$ یا $خارجاً$ ایسے حصوں میں تقسیم
کیا جائے جن کی نسبت مثلث کے باقی اضلاع کی نسبت کے مساوی ہو تو
نقاط تقسیم کو $اس$ کے ساتھ ملانے والا خط $اسی زاویہ کی داخلا$ یا

خارجاً تضییف کرتا ہے۔



شکل ۱۔



شکل ۲۔

۵۔ اب ج میں فرض کرو کہ ۱ لا زاویہ ب ا ج کی تضییف کرتا ہے و خطاً
شکل ۱۔ میں اور خارجاً شکل ۲۔ میں، یعنی موخر الذکر صورت میں فرض کرو کہ
۱ لا خارجی ۵ ب ا ج کی تضییف کرتا ہے۔

دونوں صورتوں میں یہ ثابت کرنا مطلوب ہے کہ

$$ب : لا : لا ج = ب : ۱ : ا ج$$

ج میں سے ج ع خط لا ا کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ ب ا سے
(یا ب ا ممدودہ سے) ع پر ملتا ہے۔ شکل ۱۔ میں ایک نقطہ ب' ا ب میں
فرض کرو۔

ثبوت۔ چونکہ لا ا اور ج ع متوازی ہیں

اس لیے دونوں شکلوں میں ۵ ب ا لا = مقابل کا اندرونی ۵ ا ج ج
نیز مفروض کی بنا پر

$$۵ ب ا لا = ۵ لا ا ج$$

$$= متبادل ۵ ا ج ع$$

$$اس لیے ۵ ا ج ج = ۵ ا ج ع$$

$$اس لیے ا ج = ع$$

نیز چونکہ لا ا متوازی ہے ج ع کے جو مثلث ب ج ع کا ایک ضلع
ہے، اس لیے دونوں شکلوں میں

$$ب : لا : لا ج = ب : ۱ : ا ج$$

برعکس اس کے فرض کرو کہ ب ج کی لا پر داخل (شکل ۱۲) یا خارجاً (شکل ۱۳) میں اس طرح تقسیم کی گئی ہے کہ

$$\text{ب لا : لا ج} = \text{ب ا : ا ج}$$

$$\text{یہ ثابت کرنا ہے کہ د ب ا لا = د لا ا ج}$$

ثبوت - اوپر کے عمل کے موافق چونکہ لا متوازی ہے ج ع کے جو
 Δ ب ج ع کا ایک ضلع ہے

$$\text{اس لیے ب لا : لا ج} = \text{ب ا : ا ع}$$

$$\text{لیکن مفروض کی بنا پر ب لا : لا ج} = \text{ب ا : ا ج}$$

$$\text{اس لیے ب ا : ا ج} = \text{ب ا : ا ع}$$

$$\text{اس لیے ا ج} = \text{ا ع}$$

$$\text{اس لیے د ا ع ج} = \text{د ا ج ع}$$

$$= \text{متبادل د لا ا ج}$$

اس لیے دونوں شکلوں میں

$$\text{خارجی د ب ا لا} = \text{مقابل کا اندرونی د ا ع ج}$$

$$\text{اس لیے د ب ا لا} = \text{د لا ا ج}$$

تعریف

ایک محدود خط مستقیم ہے، اس کو داخلاً دو حصوں میں اور خارجاً دو حصوں میں اس طرح تقسیم کیا گیا ہے کہ داخلی حصوں کی نسبت خارجی حصوں کی نسبت کے مساوی ہے، خط کی ایسی تقسیم کو موسیقی تقسیم کہتے ہیں۔

اس تعریف کی بنا پر مسئلہ ۱۱ سے ذیل کا نتیجہ صریح حاصل ہوتا ہے۔

مثلاً کے د ا سی زاویہ کے داخلی اور خارجی منصف قاعدہ کی موسیقی

تقسیم کرتے ہیں۔

یہ ظاہر ہے کیونکہ ہر صورت میں قاعدہ کے دو حصوں کی نسبت باقی اضلاع

کی نسبت کے مساوی ہے۔

[موسیقی تقسیم کے متعلق نظری مسائل اور مثالوں کے لیے ملاحظہ ہو صفحہ ۱۱۱]

مشقین مسئلہ ۶۰ پر

(عدادی اور ترسیمی)

۱۔ قاعدہ اب = ۵ و ۳ پر کوئی مثلث ج اب بناؤ، اب سے کاٹو
۲۱ = ۲۱۔

لا میں سے لا ما، ب ج کے متوازی کھینچو جو ا ج سے ما پر ملے۔
اما، ما ج کو ناپو، اور ذیل کی نسبتوں کا مقابلہ کرو

$$(۱) \frac{۲۱}{۲۱} ، \frac{۲۱}{۲۱} (۲) \frac{۲۱}{۲۱} ، \frac{۲۱}{۲۱} (۳) \frac{۲۱}{۲۱} ، \frac{۲۱}{۲۱}$$

۲۔ مثلث اب ج میں لا ما، ب ج کے متوازی کھینچا گیا ہے جو باقی اضلاع سے لا اور ما پر ملتا ہے۔

(۱) اگر اب = ۳ و ۶، ا ج = ۴ و ۲ اور ۲۱ = ۲۱ تو اما کا طول معلوم کرو۔

(۲) اگر اب = ۲ و ۰، ا ج = ۵ و ۱ اور اما = ۹ و ۰ تو ب لا کا طول معلوم کرو۔

(۳) اگر لا، اب کو نسبت ۸ : ۳ سے تقسیم کرے اور اگر

ا ج = ۸ و ۸ سنتی میٹر تو اما، ما ج کے طول معلوم کرو۔

۳۔ اب ج ایک مثلث ہے، اس میں لا ما ضلع ب ج کے متوازی کھینچا گیا ہے جو باقی اضلاع محدودہ سے لا اور ما پر ملتا ہے۔

(۱) اگر اب = ۵ و ۵ سنتی میٹر، ا ج = ۵ و ۳ سنتی میٹر اور لا = ۲ و ۲

سنتی میٹر، تو حساب اور پیمائش سے اما کا طول معلوم کرو۔

(۲) اگر لا، اب کو خارجاً نسبت ۱۱ : ۴ سے تقسیم کرے اور اگر ا ج

= ۹ و ۴ سنتی میٹر تو ا ج کے حصوں کے طول معلوم کرو۔

(نظری)

۴۔ تین متوازی خطوط مستقیم کسی دو قاطع خطوط کو ایک ہی نسبت سے تقسیم کرتے ہیں۔

۵۔ جو خط منحرف کے ماثل اضلاع کے نقاط وسطی کو ملاتا ہے وہ متوازی اضلاع کے متوازی ہوتا ہے۔

۶۔ دو مثلث ا ب ج، د ب ج مشترک قاعدہ ب ج کے ایک ہی طرف واقع ہیں، قاعدہ کے کسی نقطہ ع میں سے ب ا اور ب د کے متوازی خط کھینچے گئے ہیں جو ا ج، د ج سے بالترتیب ف اور گ پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ف گ، ا د کے متوازی ہے۔

۷۔ مثلث ا ب ج میں ایک قاطع کھینچا گیا ہے جو اضلاع ب ج، ج ا، ا ب (ممدودہ بشرط ضرورت) سے بالترتیب د، ع، ف پر ملتا ہے اور ا ب اور ا ج کے ساتھ مساوی زاویے بناتا ہے، ثابت کرو کہ

$$ب د : ج د = ب ف : ج ع$$

مشقیں مسئلہ ۶ پر

(عدادی اور ترقیمی)

۱۔ مثلث ا ب ج بناؤ جس میں $ا = ۵$ ، $ب = ۴$ ، $ج = ۶$ ہوں جہاں ا، ب، ج اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کے طول ہیں۔ زاویہ ا کی داخلاً اور خارجاً دو خطوط سے تنصیف کرو جو ب ج سے اور ب ج ممدودہ سے لا اور ما پر ملیں۔

ب لا، لا ج، ب ما، ما ج کو ناپو، اس طرح ذیل کی نسبتوں کی قیمتیں معلوم کرو اور ان کا مقابلہ کرو

$$\frac{ب لا}{لا ج}، \frac{ب ما}{ما ج}، \frac{ب ا}{ا ج}$$

۲۔ مثلث abc میں $a = 5$ ، $b = 3$ ، $c = 5$ سنتی میٹر، b سے a اور c پر ملے ہیں۔
 جن حصوں میں a اور b قاعدہ کو تقسیم کرتے ہیں ان کے طول معلوم کرو اور اپنے
 نتائج کی تصدیق تریسیمی طور پر کرو۔

۳۔ مسئلہ ۶۱ کی بنا پر ذیل کے عمل مرتب کرو:
 (۱) دیے ہوئے طول کے خط مستقیم کو تین مساوی حصوں میں تقسیم کرنا۔
 (۲) دیے ہوئے خط کو داخلی اور خارجی نسبت $2:3$ میں تقسیم کرنا۔

نظری

۴۔ مثلث abc کا خط ad وسطانیہ ہے، زاویوں a ، b ، c کی تہیاف ایسے خطوط کے ذریعہ کی گئی ہے جو a ، b ، c سے بالترتیب e اور f پر
 ملے ہیں، ثابت کرو کہ e ، f ، b ، c کے متوازی ہے۔

۵۔ abc کا ایک دو اربعۃ الاضلاع (چار ضلعی) ہے، اگر زاویوں a اور c کے
 منصف قطر b پر ملیں تو b اور d کے منصف a ، c پر ملیں گے۔
 ۶۔ مسئلہ ۶۱ کی مدد سے ثابت کرو کہ مثلث کے

(۱) تین زاویوں کے داخلی منصف ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔
 (۲) دو زاویوں کے خارجی منصف اور تیسرے زاویہ کا داخلی منصف ایک ہی
 نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

۷۔ اگر مثلث abc کا داخلی مرکز d ہو اور ad کو اتنا خارج کیا جائے کہ
 یہ b ، c سے a پر ملے تو ثابت کرو کہ

$$ad : da = ab + ac : bc$$

۸۔ مثلث کا قاعدہ معلوم ہے اور باقی اضلاع کی نسبت معلوم

ہے، اس کا طریق معلوم کرو۔

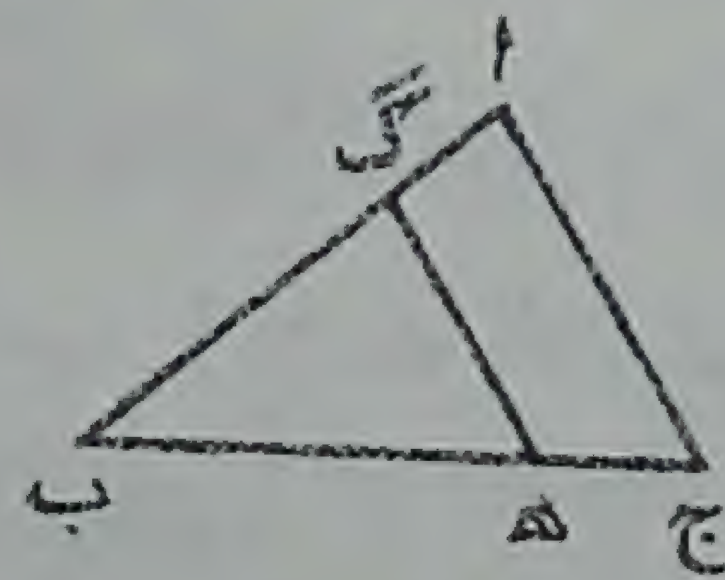
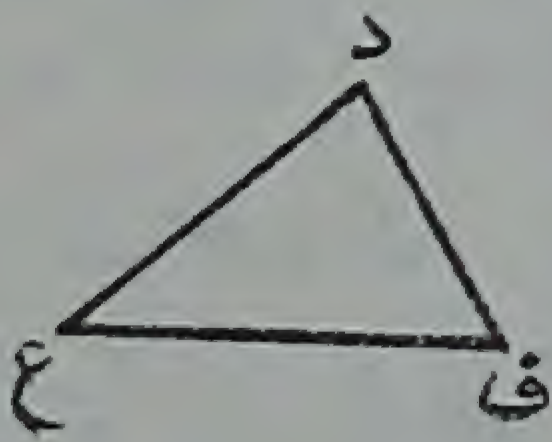
۹۔ مثلث بناؤ، اس کا قاعدہ، ایسی زاویہ اور باقی اضلاع کی نسبت

تینوں معلوم ہیں۔

متساوی الزوایا مثلث

مسئلہ اثباتی ۶۲ [اقلیدس م ۶ ش ۴]

اگر دو مثلث متساوی الزوایا ہوں تو ان کے متناظر اضلاع
متناسبت ہوتے ہیں۔



فرض کرو کہ مثلثات ا ب ج، د ع ف میں زاویے ا اور ب
بالترتیب مساوی ہیں زوایا د اور ع کے، نیز اس لیے زاویے ج اور ف
بہم مساوی ہیں۔
یہ ثابت کرنا ہے کہ

$$اب : د ع = ب ج : ع ف = ج ا : ف د$$

ثبوت۔ د ع ف کو د ا ب ج پر رکھو اس طرح کہ ع، ب
پر اور ع، ف، ب ج پر واقع ہو، تب چونکہ
د ع = د ب، ع د ضلع ب ا پر پڑیگا۔
فرض کرو کہ د آ کے گ پر اور ف نقطہ ہ پر پڑتا ہے یعنی
گ ب ہ مثلث د ع ف کا نیا مقام ہے۔

اب مفروضات کی بنا پر د = د ا
یعنی خارجی د ب گ ہ = مقابل کا داخلی د ب ا ج

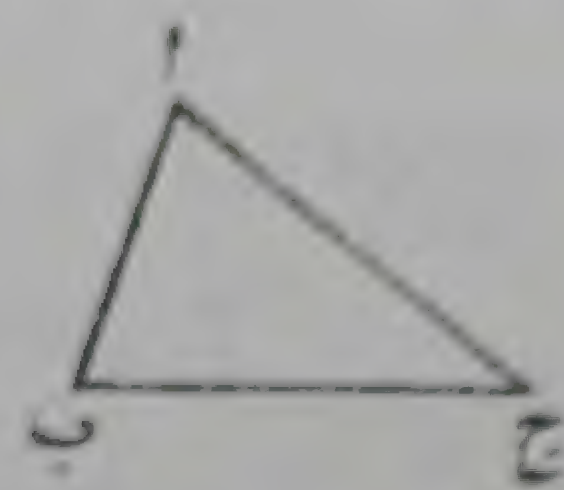
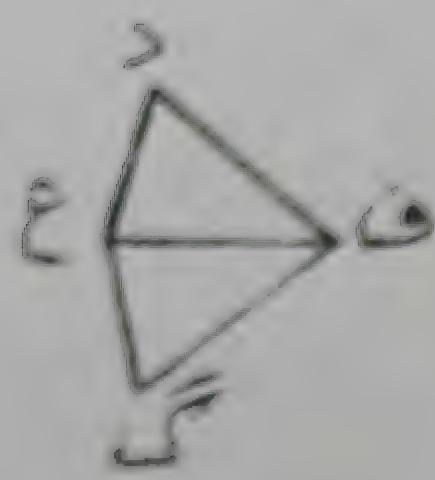
اس لیے
اور اس لیے $ب : ا : ب گ = ب ج : ب ہ$ مسئلہ ۴۰، نتیجہ
یعنی $ا ب : د ع = ب ج : ع ف$
اسی طرح $د ع ف کو ا ب ج$ پر اس طرح رکھنے سے کہ
ف ب ج پر واقع ہو اور ف ع، ف د بالترتیب ج ب اور ج ا پر ہیں
ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$ب ج : ع ف = ج ا : ف د$
پس ثابت ہوا کہ

$ا ب : د ع = ب ج : ع ف = ج ا : ف د$

مسئلہ اثباتی ۴۳ [اقلیدس م ۶ ش ۵]

اگر دو مثلثوں کے ضلعے متناسب ہوں جبکہ انہیں ایک ہی زاویہ
میں لیا جائے تو مثلث متساوی الزویا ہونگے اور ان کے وہ زاویے
متساوی ہونگے جو متناظر اضلاع کے سامنے ہیں۔



مثلثوں $ا ب ج$ ، $د ع ف$ میں فرض کرو کہ

$ا ب : د ع = ب ج : ع ف = ج ا : ف د$

یہ ثابت کرنا ہے کہ یہ متساوی الزویا ہیں۔
 $ع ف$ کے نقطہ $ع$ پر $د ف ع گ$ ، $د ب$ کے متساوی بناؤ

اور ع ف کے نقطہ ف پر د ع ف گ ' د ج کے مساوی بناؤ
 باقی د ع گ ف = باقی زاویہ ا
 ثبوت۔ چونکہ مثلثوں ا ب ج اور گ ع ف کے زاویے باہم
 مساوی ہیں

مسئلہ ۶۳

اس لیے ا ب : گ ع = ب ج : ع ف
 لیکن مفروضات کی بنا پر

ا ب : د ع = ب ج : ع ف

اس لیے ا ب : گ ع = ا ب : د ع

یعنی گ ع = د ع

اسی طرح سے گ ف = د ف

اب مثلثوں گ ع ف اور د ع ف میں

گ ع = د ع

گ ف = د ف

اور ع ف مشترک ہے

مسئلہ ۶۴

اس لیے دونوں مثلث ہر طرح سے مساوی ہیں

اس لیے د ع ف = د گ ع ف

= د ب

اور د د ف ع = د گ ف ع

= د ج

اور باقی کا د = باقی کا د

یعنی مثلثوں د ع ف اور ا ب ج کے زاویے باہم مساوی ہیں

اور یہی ثابت کرنا تھا۔

متساوی الزوایا مثلثوں پر مشتمل

(اعددی اور تریبی - نتائج حساب لگانے سے حاصل کیے جائیں اور ان کی تصدیق تریبی طریق پر کی جائے۔)

اسے مثلث اب ج میں لا ما ، ب ج کے متوازی کھینچا گیا ہے جو باقی اضلاع کو لا اور ما پر کاٹتا ہے۔

(۱) اگر اب = ۲۵ ، اج = ۶۰ ، لا = ۵۱ تو اما معلوم کرو

(۲) اگر اب = ۳۵ ، اج = ۶۱ ، اما = ۵۲ تو لا معلوم کرو

(۳) اگر اب = ۴۲ ، سنتی میٹر ، لا = ۳۶ ، سنتی میٹر ، اما = ۶۶

سنتی میٹر تو اج معلوم کرو۔

۲۔ اوپر کی مثال کی شکل میں

(۱) اگر اب = ۲۴ ، ب ج = ۶۰ ، لا = ۳۳ تو لا ما معلوم کرو۔

(۲) اگر ب ج = ۷۷ ، سنتی میٹر ، لا ما = ۵۵ ، سنتی میٹر ، لا = ۴۵ ، سنتی میٹر

تو اب معلوم کرو۔

۳۔ مثلث اب ج میں اضلاع لا = ۳۰ ، ب = ۳۶ ، ج = ۴۲ ،

خط ق ط ، اج کے متوازی کھینچا گیا ہے اور اس کا طول ۳۰ ہے۔ مثلث ق ب ط کے باقی اضلاع کا طول معلوم کرو۔

۴۔ مثلث اب ج میں لا = ۸ ، سنتی میٹر ، ب = ۷ ، سنتی میٹر ، ج = ۱۰ ، سنتی میٹر ،

ضلع اب میں نقطہ ن لیا گیا ہے جو ا سے ۴ سنتی میٹر کے فاصلہ پر ہے ، ن ق ضلع ب ج کے متوازی کھینچا گیا ہے۔ ن ق اور ق ج کے طول معلوم کرو۔

۵۔ ایک مثلث کھیت کے ضلع بالترتیب ۳۵ گز ، ۳۰ گز اور ۳۰ گز ہیں ،

کھیت کے خاکہ میں بڑے سے بڑا ضلع ۲۵ لمبا دکھایا گیا ہے ، باقی ضلعوں کا طول معلوم کرو۔

۶۔ مثلث اب ج کے قاعدہ ب ج کے متوازی لا ما کھینچا گیا ہے ، اگر

لا = $\frac{1}{4}$ فٹ ، لا ما = $\frac{1}{3}$ فٹ ، اما = ۶ فٹ ۲ انچ اور لا ب = $\frac{1}{4}$ فٹ

تو مثلث ا ب ج کے ضلعوں کے طول محسوب کرو۔

۷۔ مثلث ا ب ج کا زاویہ ج قائمہ ہے، وتر کے کسی نقطہ ن سے خط ن ق،
ا ج کے متوازی کھینچا گیا ہے۔

اگر ا ج = $\frac{1}{4}$ ، ب ج = $\frac{3}{4}$ اور ن ق = $\frac{1}{4}$ تو ب ق، بن اور ان
معلوم کرو۔

۸۔ مثلث ا ب ج میں ا سے عمود ا د، ب ج پر نکالا گیا ہے، اور ا د کے
نقطہ لا میں سے ب ج کے متوازی ایک خط کھینچا گیا ہے جو باقی اضلاع سے ن اور ق
پر ملتا ہے۔

اگر ب ج = ۹ سنتی میٹر، ا د = ۸ سنتی میٹر، د لا = ۳ سنتی میٹر تو ن ق
معلوم کرو۔

۹۔ مثلث ا ب ج میں ا = ۲۵۰ سنتی میٹر، ب = ۳۵۵ سنتی میٹر، ج = ۴۵۵
سنتی میٹر۔ قاعدہ کے سروں سے ب د اور ج ع مقابل کے اضلاع تک کھینچے گئے
ہیں اور وہ ایک دوسرے کو ن پر قطع کرتے ہیں۔

اگر ع ن : ن ج = د ن : ن ب = ۵ : ۲
تو ع د، ا د اور د ج کے طول معلوم کرو۔

متساوی الزوایا مثلثوں پر مشق

(نظری)

۱۔ ثابت کرو کہ مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقاط کو جو خط ملاتا ہے وہ
(۱) تیسرے ضلع کا متوازی ہوتا ہے (۲) تیسرے ضلع کا نصف ہوتا ہے۔
۲۔ منحرف ا ب ج د میں ا ب، د ج کے متوازی ہے اور اس کے قطر
وپر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$ا د : د ج = و ب : و د$$

اگر ا ب = ۲ د ج تو ثابت کرو کہ و دونوں قطروں کا نقطہ تثلیث ہے۔

۳۔ ایک ہی نقطہ میں سے گزرنے والے تین خطوں کو دو متوازی خط بالترتیب
ا، ب، ج اور ن، ق، ط پر قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ

$$ا ب : ب ج = ن ق : ق ط$$

۴۔ ا ب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے، د سے ایک خط کھینچا گیا ہے
جو ا ب کو ع پر اور ج ب مخرجہ کو ف پر کاٹتا ہے، اس شکل میں بتاؤ کہ کونسے
تین مثلث متساوی الزوایا ہیں، نیز ثابت کرو کہ

$$د ا : ا ع = ف ب : ب ج = ج د$$

۵۔ مثلث ا ب ج کے ضلع ا ج میں کوئی نقطہ د لیا گیا ہے، اگر ا د،
د ج، ا ب، ب ج کی بالترتیب نقاط ع، ف، گ، ہ پر تقصیف کی جائے
تو ثابت کرو کہ ع گ مساوی ہے ہ ف کے۔

۶۔ ا ب اور ج د دو متوازی خطوط مستقیم ہیں، ع خط ج د کا نقطہ
تقصیف ہے۔ ا ج اور ب ع نقطہ ف پر اور ا ع اور ب د نقطہ گ پر
قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ ف گ متوازی ہے ا ب کے۔

۷۔ ا ب ایک دائرہ کا قطر ہے، ا میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو محیط سے
ج پر اور ب پر کے مماس سے د پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ
(۱) مثلث ج ا ب اور ب ا د متساوی الزوایا ہیں۔

(۲) ا ج، ا ب، ا د تین متناسب ہیں۔

(۳) سطح ا ج، ا د خط ا د کے سب مقامات کے لیے مستقل ہے۔

۸۔ دائرہ کے اندر کوئی نقطہ لا ہے، اس میں سے دو وتر ا ب، ج د

کھینچے گئے ہیں اور ا ج، ب د کو ملایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ

(۱) مثلث ا ل ج کے زاویے د ل ا ب کے زاویوں کے بالترتیب مساوی ہیں

$$(۲) ا ل : ل ج = د ل : ل ب$$

اس کی مدد سے مسئلہ ۵ کا متبادل ثبوت حاصل کرو۔

۹۔ اگر باہر کے نقطہ لا سے ایک دائرہ کا مماس لام اور قاطع خط لام ب

دونوں کھینچے جائیں اور ا م، ب م کو ملایا جائے تو ثابت کرو کہ

(۱) ا ل ا م ، م ل ا ب متساوی الزوایا مثلث ہیں۔

(۲) ۱ ل ا م : ۱ ل ا م = ل ا م : ل ا ب
اس سے مسئلہ ۵۸ کا متبادل ثبوت حاصل کرو۔

تعریفات

۱۔ دو مستقیم الاضلاع شکلیں متساوی الزوایا کہلاتی ہیں جب کہ ایک کے زاویے ترتیب وار دوسری شکل کے زاویوں کے مساوی ہوں۔

۲۔ مستقیم الاضلاع شکلیں متشابه کہلاتی ہیں جب کہ ایک کے زاویے دوسری کے زاویوں کے ترتیب وار مساوی ہوں، نیز ان کے متناظر ضلعے متناسب ہوں۔

مثلاً دو ذواربعة الاضلاع

اشکال ا ب ج د ، ع ف گ ہ متشابه ہونگی اگر ا ، ب ، ج ، د پر کے زاویے بالترتیب ع ، ف ، گ ، ہ پر کے زاویوں کے مساوی ہوں۔ نیز علاوہ اس کے ذیل کے تناسب درست ہوں

$$\frac{ا ب}{ع ف} = \frac{ب ج}{ف گ} = \frac{ج د}{گ ہ} = \frac{د ا}{ہ ع}$$

۳۔ متشابه اشکال دو ضلعوں کے لحاظ سے متشابه طور پر بنی ہوئی کہلاتی ہیں جب کہ یہ ضلعے ایک دوسرے کے جواب یا متناظر ہوں۔

متشابه اشکال پر نوٹ

متشابه اشکال ایک ہی شکل کی ہوتی ہیں۔
اس کے لیے دو شرطیں ضروری ہیں۔

(۱) شکلوں کے زاویے ایک ایک کو کے ایک ہی ترقیب میں مساوی ہونے

چاہیے۔

(۲) ان کے متناظر ضلع متناسب ہونے چاہیے۔

مثالوں کی صورت میں ہم نے دیکھا ہے کہ یہ شرطیں ایک دوسرے پر منحصر ہیں

ان میں سے کوئی سہی ایک دوسری کا لازمی نتیجہ ہے: مثلاً

(۱) اگر ایک مثلث کے زاویے دوسرے مثلث کے زاویوں کے بالتقریب

مساوی ہوں تو ہم نے دیکھا ہے (مسئلہ ۶۲) کہ ان کے متناظر ضلع متناسب ہوتے ہیں۔

(۲) اگر مثالوں کے ضلع متناسب ہوں تو (مسئلہ ۶۳) میں ثابت کیا گیا ہے

کہ ان کے زاویے بھی مساوی ہوتے ہیں۔

لیکن تین سے زیادہ ضلعوں

والی مستقیم الاضلاع اشکال کی صورت

میں ان نتائج کا درست ہونا ضروری

نہیں۔ مثلاً عاشریہ کی پہلی تصویر میں

دو شکلیں مساوی الزوایا میں لیکن عکساً

ان کے ضلع متناسب نہیں ہیں دوسری

تصویر میں شکلوں کے ضلع متناسب

ہیں لیکن زاویے مساوی نہیں۔

مسئلہ اثباتی ۶۴، [اقلیدس م ۶ ش ۶]

اگر دو مثلث ایسے ہوں کہ ایک مثلث کا ایک زاویہ

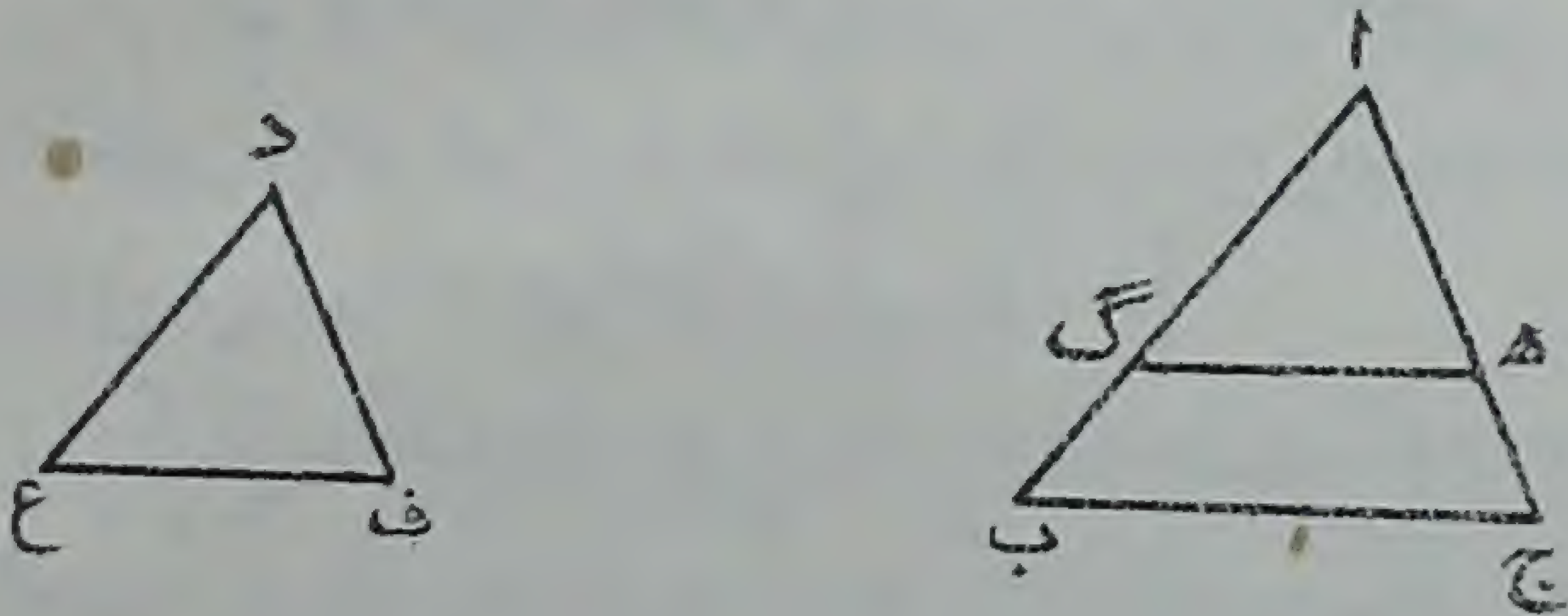
دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے مساوی ہو اور مساوی

زاویوں کے گرد کے اضلاع متناسب ہوں تو مثلث متشابه

ہونگے۔

فرض کرو کہ مثلثوں $\triangle ABC$ ، $\triangle DEF$ میں $\angle A = \angle D$
 $AB : DE = AC : DF$

اور



تو یہ ثابت کرنا ہے کہ مثلث $\triangle ABC$ اور $\triangle DEF$ متشابه

ہو گئے۔

ثبوت۔ $\triangle DEF$ کو $\triangle ABC$ پر اس طرح رکھو کہ D ،

ا پر اور E ، A پر پڑے۔

تب چونکہ $\angle A = \angle D$ $\triangle ABC$ اس لیے $\angle F$ ، $\angle C$ پر پڑے گا۔
 فرض کرو کہ E نقطہ G پر اور F نقطہ H پر آ کے پڑتا ہے یعنی
 اگ H ، مثلث $\triangle DEF$ کا نیا مقام ہے۔

مفروض کی بنا پر

$$AB : DE = AC : DF$$

$$AB : AG = AC : AH$$

یعنی

اس لیے G H متوازی ہے BC کے مسئلہ ۶۰، نتیجہ

اس لیے خارجی $\angle AGH = \angle A$ یعنی $\angle C = \angle A$ متقابل کا داخلی $\angle ABC$

اور خارجی $\angle AHG = \angle F$ یعنی $\angle C = \angle F$ متقابل کا داخلی $\angle ACB$

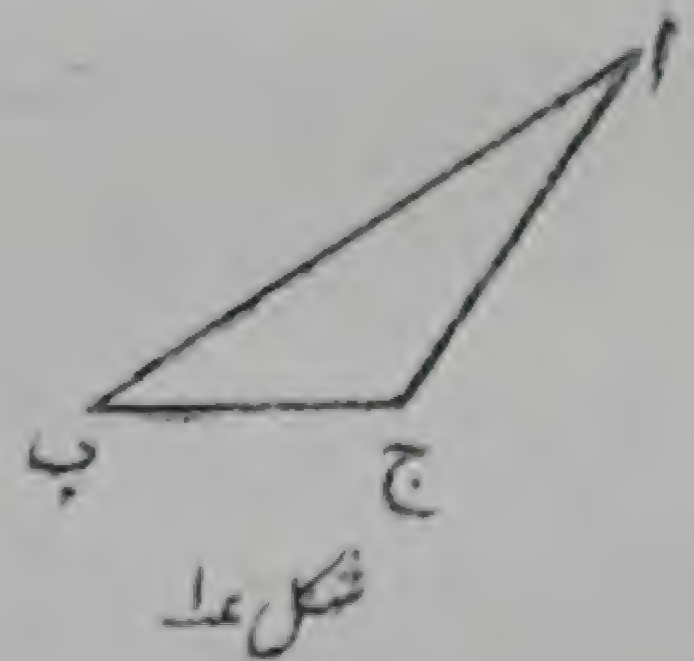
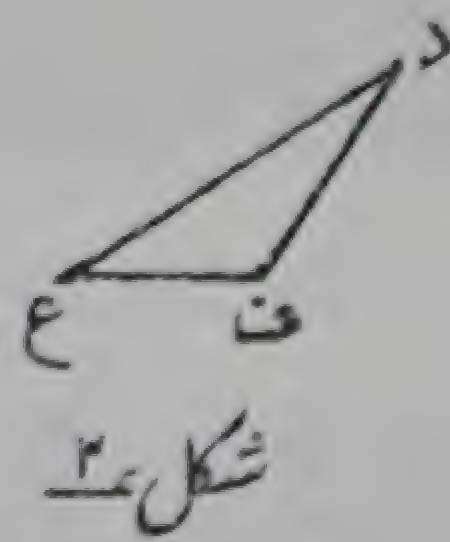
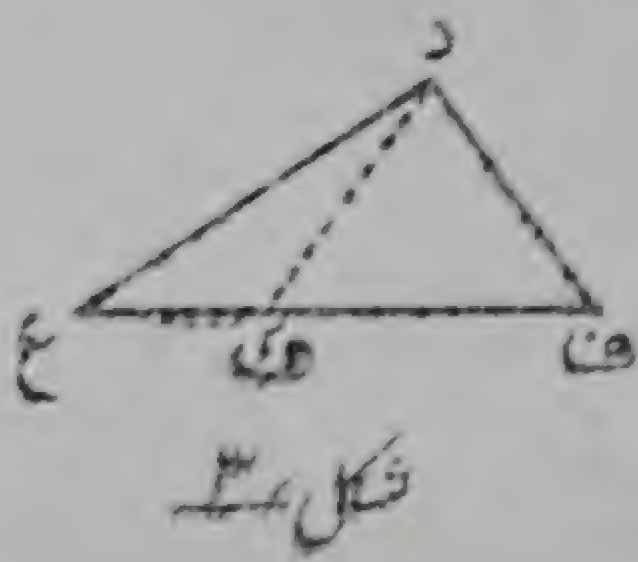
اس لیے مثلث $\triangle ABC$ ، $\triangle DEF$ متساوی الزویا ہیں۔

مسئلہ ۶۲

اس لیے ان کے متناظر اضلاع متناسب ہیں،
یعنی ΔABC اور ΔDEF متشابه ہیں۔

مسئلہ اثباتی ۶۵، [اقطیس م ۶ ش ۷]

دو مثلث ہیں، ان میں سے ایک کا ایک زاویہ دوسرے
مثلث کے ایک زاویہ کے مساوی ہے۔ نیز پہلے مثلث کے کسی دوسرے
زاویہ کے گرد کے اضلاع دوسرے مثلث کے متناظر اضلاع کے
متناسب ہیں، ثابت کرو کہ تیسرے زاویے یا تو مساوی ہیں یا
ایک دوسرے کے مکمل (یعنی ان کا مجموعہ 180° ہے) اور پہلی صورت
میں مثلث متشابه ہیں۔



مثلثوں ΔABC ، ΔDEF میں فرض کرو کہ $\angle A = \angle D$
اور فرض کرو کہ زاویوں A اور D کے گرد کے اضلاع متناسب ہیں

$$AB : DE = AC : DF \quad \text{یعنی}$$

یہ ثابت کرنا ہے کہ

یا تو $\angle B = \angle E$ [جیسا اشکال ۱ اور ۲ میں]

یا Δ ج مکمل ہے Δ ف کا [شکل ۱ اور ۲]

ثبوت - (۱) اگر $\Delta = ۱$ Δ د [شکل ۱ اور ۲]

مسئلہ ۱۶

تو Δ ج = Δ ف

اور مثلث، متساوی الزوایا میں اور اس لیے متشابه ہیں۔

(۲) اگر Δ ۱ مساوی نہ ہو Δ ع Δ ف کے [شکل ۱ اور ۲]

تو فرض کرو کہ Δ ع Δ ف = Δ ۱

تب مثلث ۱ ب ج، Δ ع Δ ف متساوی الزوایا ہیں

اس لیے ۱ ب : Δ ع = Δ ج : Δ ف

لیکن مفروضات کی بنا پر

۱ ب : Δ ع = Δ ج : Δ ف

اس لیے ۱ ج : Δ ف = Δ ج : Δ ف

پس Δ ف = Δ ف

اس لیے Δ د Δ ف = Δ د Δ ف

ثابت شدہ

لیکن Δ ج = Δ د Δ ع

= Δ د Δ ف کا مکمل

= Δ د Δ ع کا مکمل

متشابه مثلثوں پر مشقیں

نظری

۱۔ مثلث ۱ ب ج میں کوئی خط مستقیم قاعدہ ب ج کے متوازی کھینچا گیا

ہے اور باقی اضلاع پر منتهی ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ ا میں سے جو وسطانیہ گزرتا ہے وہ

اس خط کی تنصیف کرتا ہے۔

۴۔ دو مثلث $\triangle ABC$ ، $\triangle DEF$ متساوی الزوایا ہیں،
اگر A سے مقابل کے اضلاع پر کے عمودوں کے طول EF ، FD ہوں،
مساوی حالت دائروں کے نیم قطر ہوں،
اور EF اندرونی دائروں کے نیم قطر ہوں

تو ثابت کرو کہ ذیل کی ہر نسبت $\frac{EF}{FD} = \frac{FD}{FE}$ متناظر اضلاع کے کسی
جوازے کی نسبت کے مساوی ہوگی۔

۳۔ ثابت کرو کہ جو دائرہ مثلث کے اضلاع کے وسطی نقاط میں سے گزرتا ہے اس کا
نیم قطر حالت دائرہ کے نیم قطر کا آدھا ہوتا ہے۔

۴۔ دو خط AB اور CD ایک دوسرے کو لا پر اس طرح قطع کرتے ہیں کہ
 $LA : LAJ = LA : LAB$

(۱) مسئلہ ۶۴ کی مدد سے ثابت کرو کہ مثلث LAJ ، LAB متشابه ہیں۔

(۲) اس سے ثابت کرو کہ A ، D ، B ، J ایک دائرہ کے محیط پر واقع ہوتے ہیں۔

۵۔ A ، B ، J تین ہم خط نقطے ہیں، B اور J سے دو متوازی خط BN ،

JQ ایک ہی رخ میں کھینچے گئے ہیں، اور

$BN : BQ = AB : AJ$

مسئلہ ۶۴ کی مدد سے ثابت کرو کہ A ، N ، J ، Q ہم خط ہیں۔

۶۔ اگر دو مثلثوں ABC ، DEF میں $AB : DE = AC : DF$ اور

$\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE}$ تو بتاؤ کہ اس سے کیا نتیجہ نکلتا ہے۔

شکلیں کھینچ کر دکھاؤ کہ اس نتیجہ پر کیا اثر پڑتا ہے اگر یہ بھی دیا جائے کہ

(۱) J کم ہے B سے،

(۲) J مساوی ہے B کے،

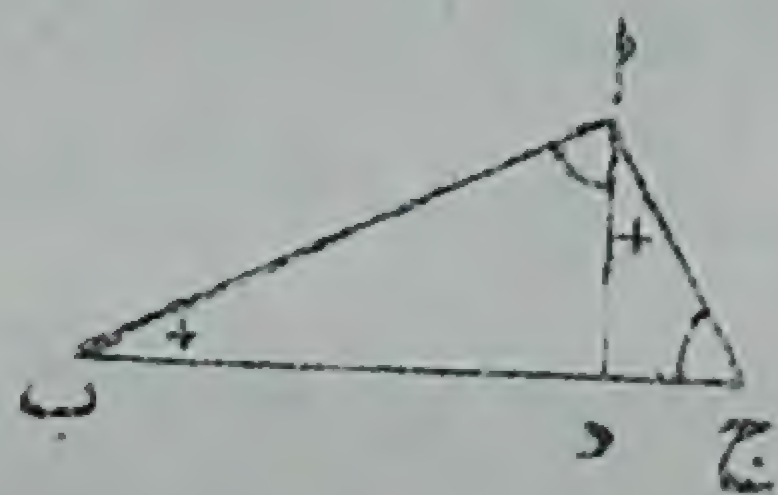
(۳) J بڑا ہے B سے۔

۷۔ ABC د ایک متوازی الاضلاع ہے، نقطہ N اور Q ایک ایسے خط پر

لیے گئے ہیں جو Δ ب کے متوازی ہے، Δ اور Δ ب نقطہ Δ پر ملے ہیں، Δ اور Δ ج نقطہ Δ پر ملے ہیں، ثابت کرو کہ Δ ب کے متوازی ہے۔
 ۸۔ مثلث Δ ب ج میں Δ ج زاویہ Δ کا منصف مثلث کے قاعدہ سے
 ۹۔ پرنہ حافظ دائرہ کے محیط سے Δ پر ملتا ہے، اگر Δ ج کو طایا جائے تو ثابت کرو کہ
 مثلث Δ ب Δ ج متشابه ہیں اور اس لیے ثابت کرو کہ
 Δ ب Δ ج = Δ ج Δ ب

مسئلہ اثباتی ۶۶، [اقلیدس م ۶ ش ۸]

مثلث قائم الزاویہ میں زاویہ قائمہ سے وتر پر عمود نکالا گیا
 ہے، ثابت کرو کہ اس کے دونوں طرف جو دو مثلث بنتے ہیں وہ
 کل مثلث کے متشابه نیز آپس میں متشابه ہیں۔



فرض کرو کہ Δ ب ج مثلث قائم الزاویہ ہے، Δ قائمہ ہے اور Δ ب ج پر

عمود ہے۔
 یہ ثابت کرنا ہے کہ مثلث Δ ب د، Δ د ج آپس میں متشابه،
 نیز Δ ب ج کے متشابه ہیں۔

مثلثوں Δ ب د، Δ ب ج میں

Δ ب د = Δ ب ج دونوں قائمے ہیں

زاویہ Δ ب دونوں میں مشترک ہے،

اس لیے باقی Δ ب د = باقی Δ ب ج
 اس لیے Δ ب د اور Δ ب ج متساوی الزوایا ہیں۔

مسئلہ اثباتی ۶۷

اس لیے ان کے مناظر ضلع متناسب ہیں،
پس Δ ب د ا اور Δ ب ا ج متشابه ہیں۔
اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ Δ د ج ا اور Δ ب ا ج
متشابه ہیں۔

اب چونکہ مثلثوں ب د ا، ا د ج کے زاویے جدا گانہ مثلث ب ا ج
کے زاویوں کے مساوی ہیں، اس لیے یہ باہم متساوی الزوایا ہیں، یعنی یہ متشابه ہیں۔
نتیجہ صریح - (۱) مثلث د ب ا اور ا د ج متشابه ہیں

اس لیے د ب : د ا = ا د : د ج
یعنی د ا خطوط د ب اور د ج کے درمیان وسط متناسب ہے
اس لیے $د ا^2 = د ب \times د ج$

(۲) چونکہ مثلث ب ج ا، ب ا د متشابه ہیں

اس لیے ب ج : ب ا = ب ا : ب د
اس لیے $ب ا^2 = ب ج \times ب د$

(۳) چونکہ مثلث ج ب ا، ج د ا متشابه ہیں

اس لیے ج ب : ج ا = ج ا : ج د
اس لیے $ج ا^2 = ج ب \times ج د$

مشقیں

(متفرق مثالیں مسائل (۶۲-۶۶) پر۔)

۱۔ متساوی الاضلاع مثلث ا ب ج کا ہر ایک ضلع Δ ہے، ضلع ب ج کو
دونوں جانب خارج کیا گیا ہے اور اس پر دو نقطے ن اور ق ایسے لیے گئے ہیں کہ
ب ن = ج ق = Δ ، نیز ا ن، ا ق کو ملایا گیا ہے، ثابت کرو کہ

$$(۱) ن ق : ن ا = ا ن : ن ب$$

$$(۲) ن ا = ۳ \Delta$$

۲۔ مثلث Δ ب ج کا زاویہ Δ قائمہ ہے، Δ ب ج پر عمود نکالا گیا ہے،
 اگر Δ ب = Δ ج = Δ ج، تو ثابت کرو کہ وتر کے حصے بالترتیب ۲، ۳ اور ۸ دے آئیں۔
 ۳۔ مثلث Δ ب ج کا زاویہ Δ قائمہ ہے، اور Δ ب ج پر Δ د عمود نکالا گیا
 ہے، ثابت کرو کہ (۱) مسئلہ ۲۵ کی مدد سے (۲) مسئلہ ۶۶ کی مدد سے کہ

$$\Delta$$
 ب ج \times Δ د = Δ ب \times Δ ج

۴۔ مثلث Δ ب ج کا زاویہ Δ قائمہ ہے، وتر پر عمود Δ ج نکالا گیا ہے،
 نیز ج Δ ج کے متوازی کھینچا گیا ہے، اگر Δ ج = ۱۵ سنتی میٹر، Δ ب = ۲۰ سنتی میٹر
 تو ثابت کرو کہ Δ ج = ۱۲ سنتی میٹر، ج Δ = ۹، ۶ سنتی میٹر۔

۵۔ ایک دائرہ کا مرکز ج ہے اور نیم قطر Δ ، اس کے ایک قطر کے سروں پر
 دو مماس کھینچے گئے ہیں، محیط کے کسی نقطہ Δ پر دائرہ کا تیسرا مماس کھینچا گیا ہے جو ان
 دو مماسوں کو نقاط Δ اور Δ پر کاٹتا ہے، ثابت کرو کہ

(۱) Δ ق Δ کے سامنے ج پر زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

$$(۲) \Delta$$
 ن ق \times Δ ن ط = Δ ر

۶۔ دو دائرے جن کے نیم قطر Δ اور Δ ہیں ایک دوسرے کو خارجاً Δ پر مس
 کرتے ہیں، ایک مشترک مماس ان کو بالترتیب نقاط Δ اور Δ پر مس کرتا ہے، ثابت کرو کہ
 (۱) Δ ن ق کے سامنے Δ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے

$$(۲) \Delta$$
 ن ق Δ = Δ ر ر

[Δ ن Δ ق Δ کو بڑھاؤ کہ یہ محیطوں سے لا اور Δ پر مماس، ثابت کرو کہ

Δ ن Δ ق قائم الزاویہ، متشابه مثلث ہیں۔]

۷۔ دو دائرے ایک دوسرے کو خارجاً Δ پر مس کرتے ہیں اور ان کا ایک
 مشترک مماس Δ ن ق مرکزوں کے ملانے والے خط سے Δ س پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ
 اگر Δ ن Δ ق کو ملایا جائے تو

(۱) مثلث Δ س Δ ن، Δ س ق Δ متشابه ہیں

$$(۲) \Delta$$
 س Δ = Δ س ن \times Δ س ق

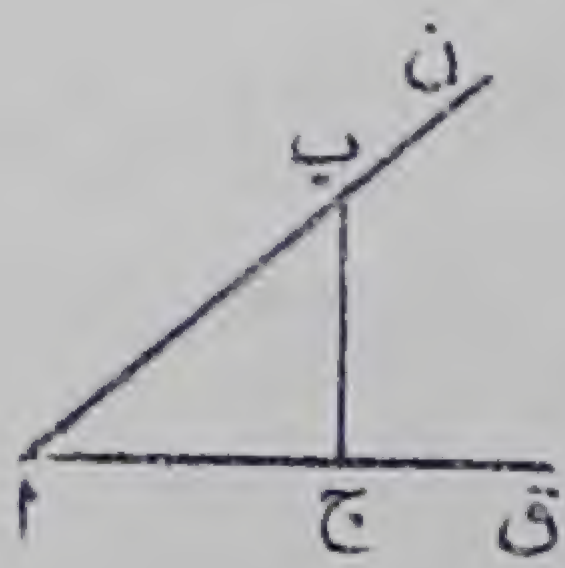
۸۔ دو دائرے ایک دوسرے کو Δ اور Δ پر کاٹتے ہیں، Δ پر ہر دائرہ کا

محاس کھینچا گیا ہے جو دوسرے کے محیط کو بالترتیب ج اور د پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ اگر
ب ج، ب د کو ملایا جائے تو

$$ب ج : ب د = ب ا : ب د$$

مثلثی نسبتیں

۱۔ ن ا ق کوئی حادہ زاویہ ہے، اس کی ساق ان میں کوئی نقطہ ب لو



اور اس سے ا ق پر ب ج عمود نکالو۔

اب مثلث قائم الزاویہ ب ا ج

میں جو زاویہ ا ہے اس کے ساتھ ذیل کی تعین

منسوب کی جاتی ہیں اور اکثر استعمال

ہوتی ہیں۔

نسبت $\frac{ب ج}{ب ا}$ یا $\frac{\text{مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}}$ کو زاویہ ا کی جیب کہتے ہیں۔

نسبت $\frac{ا ج}{ب ا}$ یعنی $\frac{\text{متصل ضلع}}{\text{وتر}}$ کو ا کی جیب التمام کہتے ہیں۔

نسبت $\frac{ب ج}{ا ج}$ یعنی $\frac{\text{مقابل کا ضلع}}{\text{متصل ضلع}}$ کو ا کا محاس کہتے ہیں۔

ان نسبتوں کے اُلٹ یا متکافی بالترتیب زاویہ ا کے قاطع التمام، قاطع

اور محاس التمام کہلاتے ہیں۔

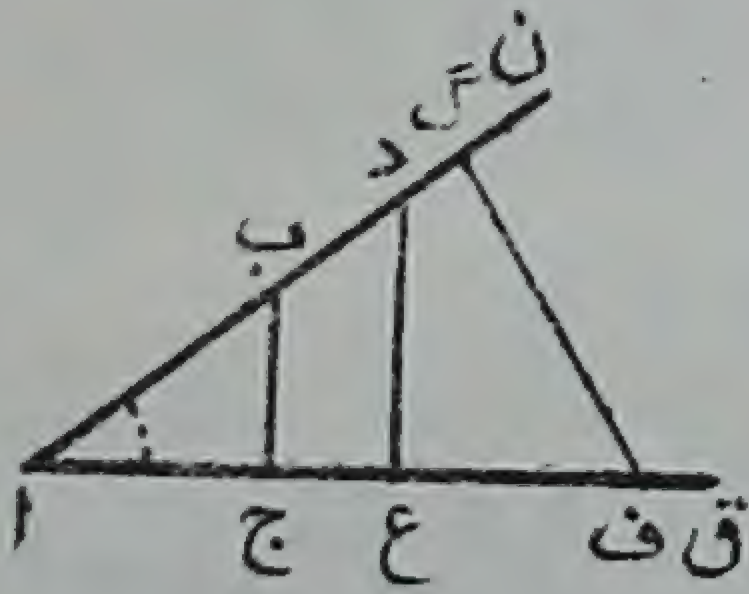
زاویہ ا کی مثلثی (علم مثلثی) نسبتیں ہیں، ان کو بالعموم ذیل کی مختصر شکلوں میں

بیان کیا جاتا ہے:-

$$ج ب ا = \frac{ب ج}{ب ا}، ج ب ا = \frac{ا ج}{ب ا}، ج ب ا = \frac{ب ج}{ا ج}$$

$$ق م ا = \frac{ا ب}{ب ج}، ق م ا = \frac{ا ب}{ا ج}، ق م ا = \frac{ا ج}{ب ج}$$

نوٹ - ان نسبتوں کے مربعوں (جب ۱) ۲، (جہم ۱) ۲، کو بالعموم اس طرح لکھتے ہیں جب ۱ ۲، جہم ۱ ۲،
 ۳ - ساتھ کی شکل میں فرض کرو کہ



ان کے نقاط ب، د سے ا قی پر عمود
 ب ج، د ع کھینچے گئے ہیں اور فرض کرو کہ
 ا ق کے نقطہ ف سے ا ن پر عمود
 ف گ کھینچا گیا ہے۔

مثلث ب ا ج، د ا ع، ف ا گ تینوں متشابه ہیں۔ اس لیے

$$\frac{ب ج}{ا ب} = \frac{د ع}{ا د} = \frac{ف گ}{ا ف}$$

لیکن ان میں سے ہر ایک نسبت، جب ا کی قیمت کو تعبیر کرتی ہے جب کہ ا سے بالترتیب مثلثات ب ا ج، د ا ع، ف ا گ سے حاصل کیا جائے۔
 پس جب ا کی قیمت نہیں بدلتی جب تک کہ ا وہی رہتا ہے، اسی طرح کا ثبوت ہر مثلثی نسبت کے لیے دیا جاسکتا ہے، اس سے ظاہر ہے کہ مثلثی نسبت کی قیمت صرف زاویہ کے ناپ پر منحصر ہے اور اس کی ساقوں کے طول پر منحصر نہیں ہے۔

مشقیں

- ۱ - مثلث ا ب ج کا زاویہ ج قائمہ ہے ۱ = ۸، ب = ۱۵، ج معلوم کرو، نیز جب ا، جہم ا، مس ا کی قیمتیں معلوم کرو۔ یہاں ا، ب، ج مثلث کے اضلاع کے طول ہیں۔
- ۲ - مثلث قائم الزاویہ میں زاویہ قائمہ کے گرد کے اضلاع ۲۵ اور ۱۲ ہیں، وتر معلوم کرو اور سب سے چھوٹے زاویہ کی مثلثی نسبتیں دریافت کرو۔
- ۳ - اگر ا حادہ زاویہ ہو تو ثابت کرو کہ مسئلہ ۲۹ ذیل کی کوئی ایک شکل اختیار کر سکتا ہے۔

(۱) جب $a + b = c$ (۲) قط $a = b + c$ مس a
 ۴۔ اب ج د ایک ذو اربعۃ الاضلاع ہے جس میں قطر ا ج ہر دو
 اضلاع اب، ج د پر علی القوائم ہے، اگر $a = ۱$ ، $b = ۱$ ، $c = ۲$ سنتی میٹر، ا ج
 $= ۳$ ، $d = ۲$ سنتی میٹر، تو ان مفروضات کی بنیاد پر شکل کھینچو اور
 اسی سے جب اب ج، مس ا ج ب، جم ج د، مس د ا ج کی قیمتیں
 معلوم کرو۔

۵۔ اگر ا حادہ زاویہ ہو تو ثابت کرو کہ

(۱) جب $(90 - a) = b$ جم $a = (90 - b)$ مس $a = (90 - b)$ جم a
 ۶۔ حادہ زاویہ بناؤ جس کی جیب $a = ۰.۶$ ہو [ملاحظہ ہو مسئلہ علی ۱۰ ترجمہ مکملن صفحہ ۱۱]
 چاندہ سے زاویہ کونا پو اور اس کی قیمت قریب ترین درجہ تک لکھو۔

۷۔ ذیل کے معطیات کی بنیاد پر ہر صورت میں حادہ زاویہ ا بناؤ

(۱) مس $a = ۰.۶$ (۲) جم $a = ۰.۶$ (۳) جب $a = ۰.۶$

ہر صورت میں زاویہ کو قریب ترین درجہ تک ناپو۔

۸۔ حادہ زاویہ ا ایسا بناؤ کہ مس $a = ۱$ ، زاویہ ا کونا پو اور پیمائش نیز

حساب سے جم a کی قیمت معلوم کرو۔

۹۔ ذیل کے نتائج ثابت کرو

(۱) جب $۴۵^\circ = ۴۵^\circ$ جم $۴۵^\circ = ۴۵^\circ$ مس $۴۵^\circ = ۴۵^\circ$ جم $۴۵^\circ = ۴۵^\circ$

[ملاحظہ ہو مثال ۱۱، صفحہ ۲۵۲، مثال ۱۲، صفحہ ۲۵۶ ترجمہ مکملن]

۱۰۔ مثلث اب ج بناؤ جس میں زاویہ ج قائمہ ہو، جس کا وتر سنتی میٹر

لمبا ہو اور جس میں مس $a = ۱$ ، ا ج اور زاویہ ا دونوں کونا پو اور جب a ،
 جم a کی قیمتیں دریافت کرو۔

۱۱۔ ذیل کے معطیات کی بناء پر مثلث قائم الزاویہ اب ج بناؤ

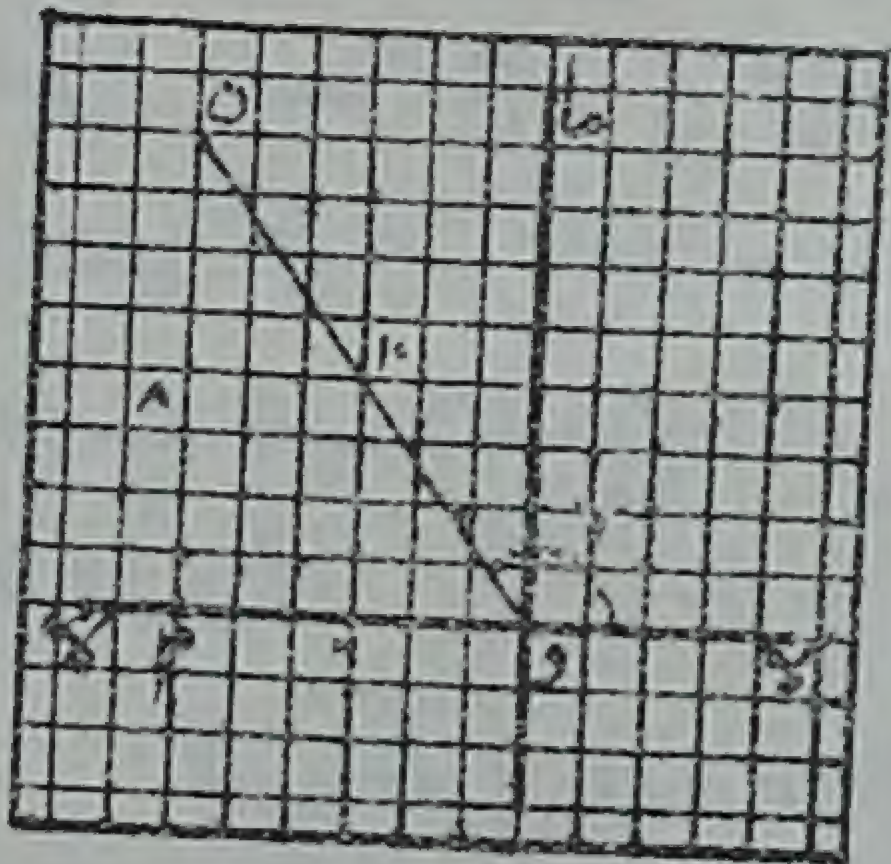
مس $a = ۰.۶$ ، ج $a = ۰.۶$ ، ب $a = ۰.۶$ سنتی میٹر۔

ج اور د ا کونا پو۔

۱۲۔ صفحہ ۳۳ پر جو تعریفیں دی گئی ہیں ان کی توسیع زاویہ منفرجہ کی

صورت میں اس طرح ہو سکتی ہے۔

فرض کرو لا و لا ایک سیدھا خط ہے اور و ما اس پر عمود وار ہے۔



فرض کرو کہ ایک خط و ن ابتدا میں
ولا پر منطبق ہوتا ہے، اس مقام سے شروع
ہو کر و کے گرد گھومنے سے یہ زاویہ پیدا کرتا ہے
خواہ زاویہ ۱ حادہ ہو یا منفرجہ یا اس سے بڑا۔
لا و لا پر عمود ن م کھینچو اس طرح

مثلث قائم الزاویہ ن و م پیدا ہو گا۔ اب
و ن کا مقام خواہ کچھ ہی ہو یعنی و ن نے اپنے گھومنے سے خواہ کچھ ہی زاویہ پیدا
کیا ہو ہم زاویہ ۱ کی مثلثی نسبتوں کی یہ تعریف کریں گے

$$\text{جب } ۱ = \frac{\text{ن م}}{\text{و ن}}, \text{ جم } ۱ = \frac{\text{و م}}{\text{و ن}}, \text{ مس } ۱ = \frac{\text{ن م}}{\text{و م}}$$

اور اس میں یہ ملحوظ رکھا جائیگا کہ و م کو مثبت خیال کیا جائیگا جبکہ
یہ و ما کے دائیں جانب ہو اور منفی خیال کیا جائیگا جب کہ یہ بائیں جانب
ہو۔ [ملاحظہ ہو صفحہ ۲۷۱ ترجمہ مکملن]

مثلاً اوپر کی شکل میں

$$\text{جب } ۱ = \frac{\text{ن م}}{\text{و ن}} = \frac{۸}{۱۰}$$

$$\text{جم } ۱ = \frac{\text{و م}}{\text{و ن}} = \frac{۴}{۱۰}$$

$$\text{مس } ۱ = \frac{\text{ن م}}{\text{و م}} = \frac{۸}{۴}$$

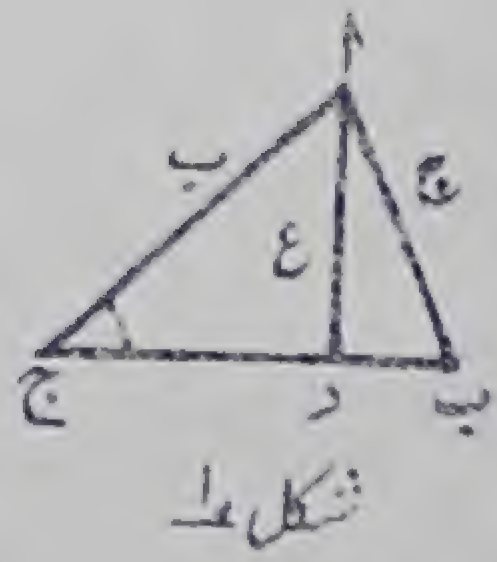
مثال - (۱) مثلث کے راس سے قاعدہ پر کا عمود

(۲) ایک ضلع کا ظل دوسرے ضلع پر

ان دونوں کو مثلثی نسبتوں کی رقوم میں بیان کرو۔

(۱) ساتھ کی دونوں شکلوں میں $\frac{ا د}{ا ج} = جب ج$

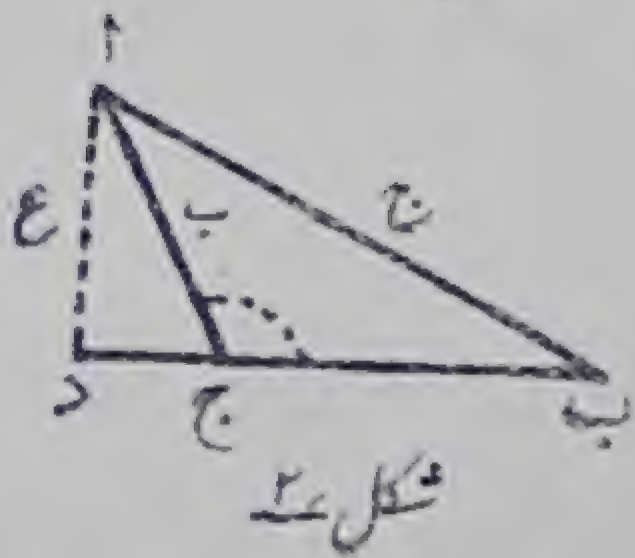
ج کی جیب دونوں صورتوں میں مثبت ہے،
اس لیے $ع = ب جب ج$



(۲) شکل ۱ میں

$$\frac{ج د}{ا ج} = جسم ج$$

شکل ۱ میں بھی $\frac{ج د}{ا ج}$



جسم ج کو تعبیر کرتا ہے

اگر ج د کو منفی خیال کیا جائے،
اس لیے تعداداً

$$ج د = + ب جسم ج \text{ شکل ۱ میں } -$$

$$ج د = - ب جسم ج \text{ شکل ۱ میں } -$$

بعض ہندی نتائج کو علم مثلث کے طریق پر بیان کیا گیا ہے۔

[ذیل کی مشقوں میں مثال سابق کی تصویروں کا حوالہ دیا گیا ہے]

۱۔ دونوں شکلوں میں $ع = ب جب ج$

اسی طرح سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ $ع = ج جب ب$

اس لیے $ب جب ج = ج جب ب$ ، اس لیے $\frac{ب}{جب ب} = \frac{ج}{جب ج}$

$$\text{اسی طرح سے } \frac{ا}{جب ا} = \frac{ب}{جب ب} = \frac{ج}{جب ج}$$

یعنی مثلث کے اضلاع اپنے مقابل کے زاویوں کی جیبوں کے متناسب ہوتے ہیں۔

۲۔ مثلث کی اس خاصیت سے مسئلہ ۶۲ حاصل کرو۔

۳۔ دونوں شکلوں میں

$$\Delta \text{ ا ب ج کا رقبہ} = \frac{1}{2} \text{ ا ب ج} \times \text{ا د} = \frac{1}{2} \text{ ا د ع}$$

$$\text{ع} = \text{ب جب ج اس لیے} \Delta = \frac{1}{2} \text{ ا ب ج جب ج}$$

اور

$$\Delta = \frac{1}{2} \text{ ا ب ج جب ا} = \frac{1}{2} \text{ ا ج ب جب ب} = \frac{1}{2} \text{ ا ب ج جب ج}$$

۴۔ مثلثی نسبتوں کی رقوم میں رقبہ بیان کرو

(۱) متوازی الاضلاع کا جس کے دو متصل ضلع اور ان کا درمیانی زاویہ تینوں

معلوم ہوں۔

(۲) معین کا جس کا ایک ضلع اور ایک زاویہ معلوم ہو۔

۵۔ ثابت کرو کہ مثلث کے عائطہ دائرہ کا نیم قطر ذیل کے ضابطہ سے حاصل

ہوتا ہے۔

$$\frac{\frac{1}{2} \text{ ا ب ج}}{\Delta} = \frac{1}{2 \text{ جب ا}} = \text{ر}$$

۶۔ شکل ۱ سے

$$\Delta \text{ ا ب ج} \quad \text{ا ب} = \text{ب ج} + \text{ج ا} - \text{ا د ب ج} \times \text{ج د}$$

شکل ۱ سے

$$\Delta \text{ ا ب ج} \quad \text{ا ب} = \text{ب ج} + \text{ج ا} + \text{ا د ب ج} \times \text{ج د}$$

$$\text{شکل ۱ سے ج د} = \text{ب} + \text{ب ج} \times \text{ج}$$

$$\text{اور شکل ۱ سے ج د} = \text{ب} - \text{ب ج} \times \text{ج}$$

پس دونوں صورتوں میں مندرجہ کرنے سے

$$\text{ج} = \text{ا} + \text{ب} - \text{ا د ب ج} \times \text{ج}$$

اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ

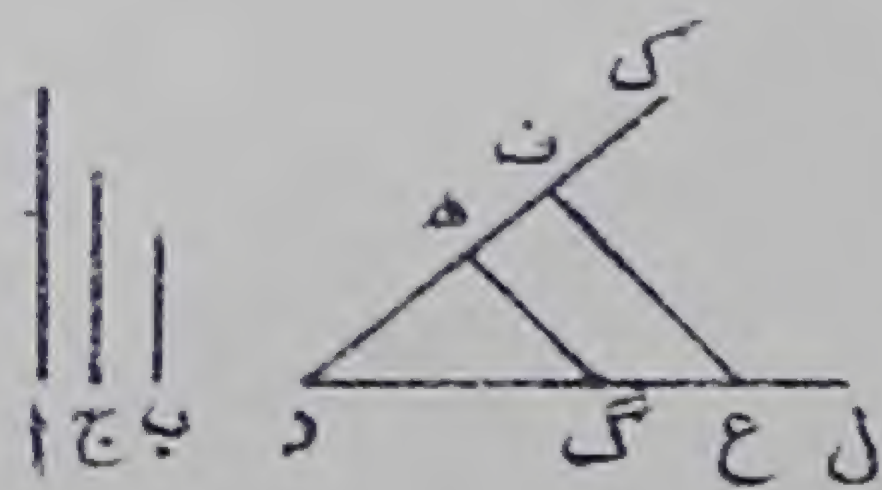
$$\text{ا} = \text{ب} + \text{ج} - \text{ا د ب ج} \times \text{ج}$$

$$\text{ب} = \text{ج} + \text{ا} - \text{ا د ب ج} \times \text{ج}$$

عملی مسائل

عملی مسئلہ ۳۵

تین دیے ہوئے خطوط مستقیم کا چوتھا متناسب معلوم کرو۔
فرض کرو کہ ۱، ب، ج تین دیے ہوئے خط ہیں، ان کا چوتھا متناسب
مطلوب ہے۔



عمل - کسی زاویہ پر دو خطوط مستقیم دل اور دک لا انتہا طول کے
کھینچو۔

دل سے کاٹو دگ = ۱، گ ع = ب اور دک سے کاٹو
دھ = ج، گھ کو ملاؤ۔

ع میں سے ع ف، گھ کے متوازی کھینچو، تب ہ ف خطوط
۱، ب، ج کا چوتھا متناسب ہوگا۔

ثبوت - مثلث د ع ف میں گھ || ع ف

اس لیے دگ : گ ع = دھ : ہ ف

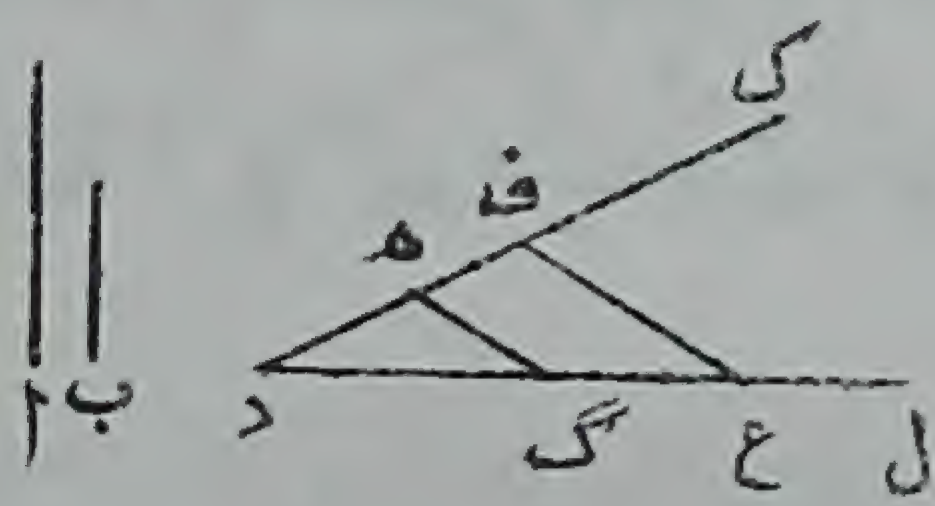
لیکن دگ = ۱، گ ع = ب، دھ = ج

اس لیے ۱ : ب = ج : ہ ف

یعنی ہ ف خطوط ۱، ب، ج کا چوتھا متناسب ہے۔

مسئلہ عملی ۳۶

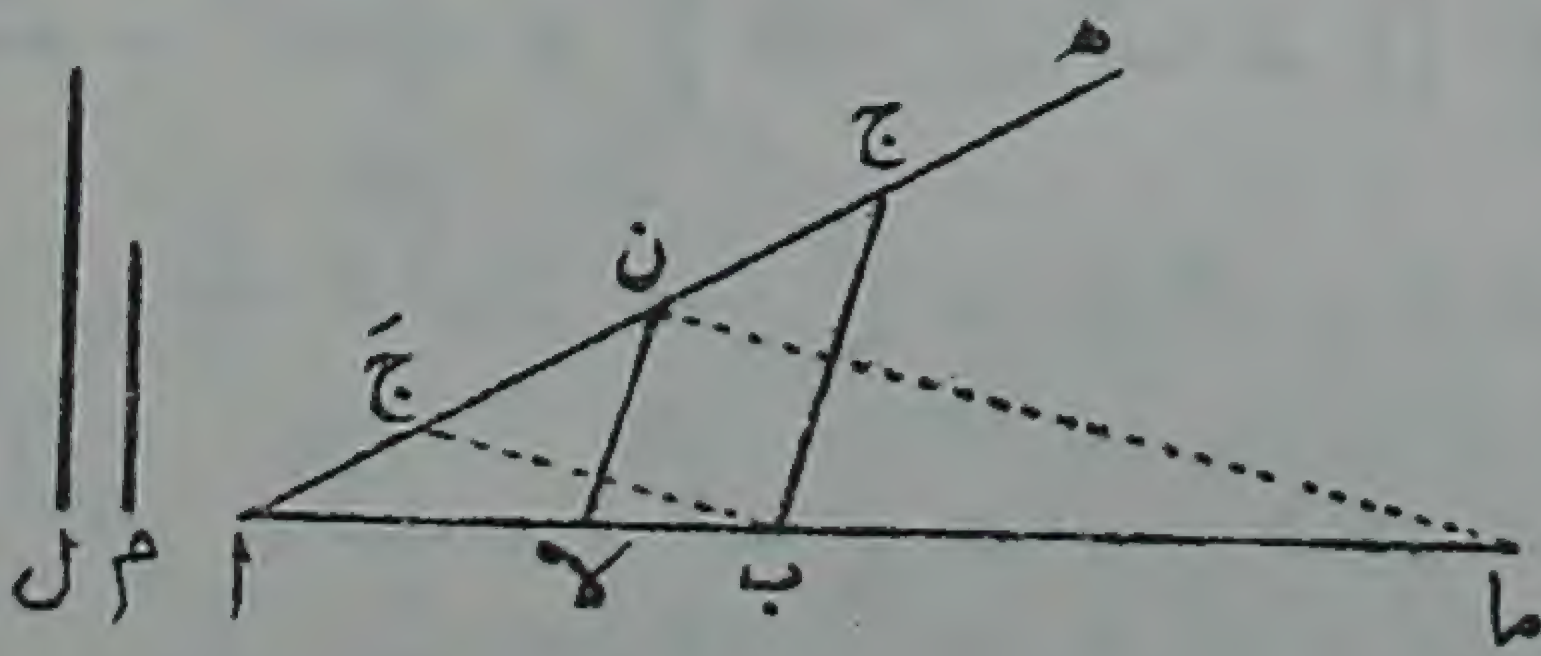
دو دیے ہوئے خطوط مستقیم کا تیسرا متناسب معلوم کرو۔
فرض کرو کہ ۱، ب دو خطوط ہیں، ان کا تیسرا متناسب مطلوب ہے۔



عمل۔ دو خط دل، دگ کھینچو،
دل سے کاٹو دگ = ۱ اور گ ع = ب اور دگ سے کاٹو
دھ = ب، گ ہ کو ملاؤ اور ع میں سے ع ف، گ ہ کے
متوازی کھینچو، تب ہ ف خطوط ۱، ب کا تیسرا متناسب ہوگا۔
ثبوت۔ حسبِ بالا مسئلہ عملی ۳۵ میں۔

مسئلہ عملی ۳۷

ایک خط مستقیم کو داخلاً اور خارجاً ایک دی ہوئی نسبت سے
تقسیم کرو۔



فرض کرو کہ ا ب خط مستقیم ہے جس کو داخلاً اور خارجاً نسبت ل : م سے
تقسیم کرنا مطلوب ہے۔

عمل - ا میں سے خط a کھینچو جو a ب کے ساتھ کوئی زاویہ بنائے۔
 a سے a ن مساوی ل کے کاٹو۔
 n a اور n سے بالترتیب n ج اور n ج کاٹو جن میں سے
 ہر ایک m کے مساوی ہو۔

ب ج، ب ج کو ملاؤ۔
 n میں سے n لا متوازی ج ب کے اور n ما متوازی ج ب
 کے کھینچو۔

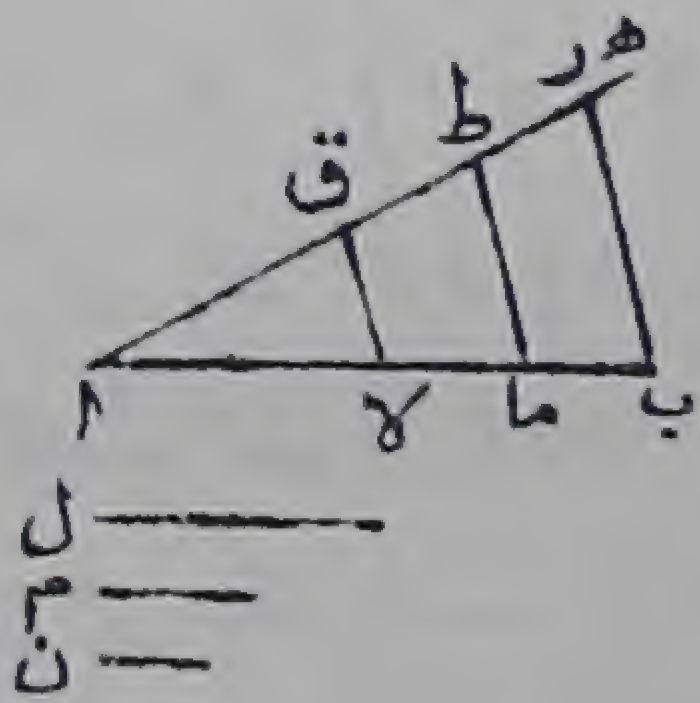
تب a ب کی لا پر داخل اور a پر خارجاً نسبت a ل : m سے
 تقسیم ہوتی ہے۔
 ثبوت - (۱) چونکہ a ب ج میں n لا، ج ب کے
 متوازی ہے، اس لیے

$$a : b = n : n = l : m$$

(۲) نیز چونکہ مثلث a ب ج میں n ما، ج ب کے متوازی
 ہے، اس لیے

$$a : m = n : n = l : m$$

نتیجہ صریح - اسی طرح کے عمل سے ایک خط مستقیم a ب کو داخل



ایسے حصوں میں تقسیم کر سکتے ہیں جو
 تین خطوط a ، m ، n کے متناسب ہوں۔

عمل - a کھینچو اور اس سے

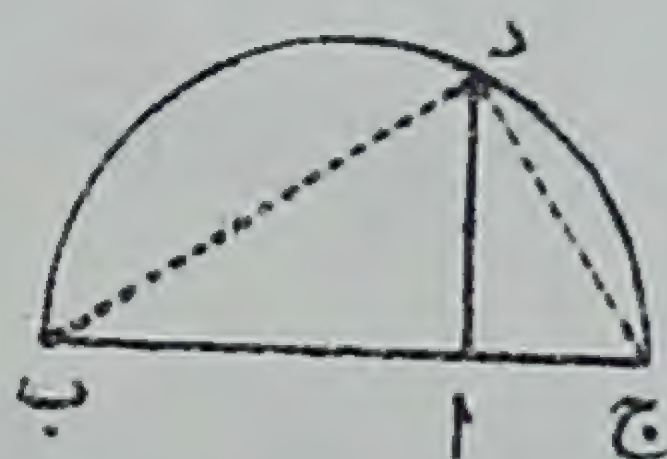
کاٹو a ق = ل، ق ط = م،
 ط ر = ن، ر ب کو ملاؤ اور ط،

ق میں سے ط ما، ق لا خط ر ب کے متوازی کھینچو۔

$$تب صریحاً \quad a : l = m : m = m : n$$

مسئلہ عملی ۳۸

دو دیے ہوئے خطوں کے درمیان وسط تناسب معلوم کرو۔



فرض کرو کہ AB، AC دو دیے ہوئے خط ہیں جن کے درمیان وسط تناسب معلوم کرنا ہے۔

عملی۔ AB، AC کو ایک ہی خط مستقیم میں رکھو اس طرح پر کہ ان کے رُخ متقابل سمتوں میں ہوں۔ B ج پر نصف دائرہ بناؤ۔ A سے AD، B ج پر عمود وار کھینچو کہ یہ محیط سے د پر ملے۔ تب AD خطوط AB اور AC کے درمیان وسط تناسب ہوگا۔ ثبوت۔ B د، D ج کو ملاؤ۔

D ب د ج چونکہ نصف دائرہ میں واقع ہے، اس لیے یہ قائمہ ہے۔ اور چونکہ مثلث قائم الزاویہ B د ج میں D ا وتر پر عمود وار کھینچا گیا ہے۔ اس لیے مثلث AB د، AD ج متشابه ہیں۔ مسئلہ ۶۶

اس لیے AB : AD = AD : AC

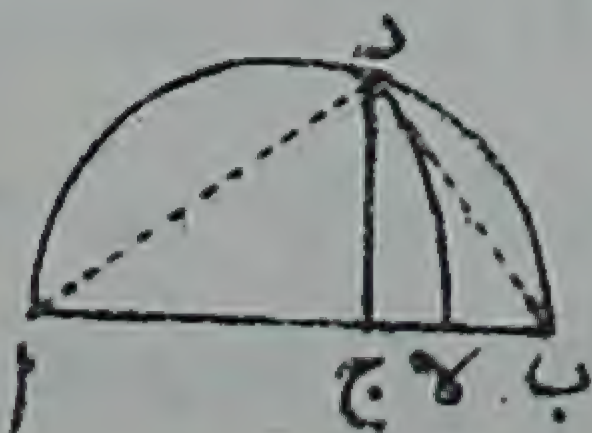
یعنی AD خطوط AB، AC کے درمیان وسط تناسب ہے۔

نوٹ۔ اگر AB، AC کو

ایک ہی رُخ میں رکھا جائے، تو ذیل کے

مفید عمل کے ذریعہ خط AB سے ان خطوط

کا وسط تناسب یوں قطع کر سکتے ہیں۔



AB پر ایک نصف دائرہ بناؤ اور ج سے ج د، AB پر عمود وار

کھینچو کہ یہ محیط سے د پر ملے۔ AB سے A لا مساوی AD کے کاٹو۔

تب الا خطوط اب، ا ج کے درمیان وسط تناسب ہوگا،
 مثلث اب د، ا د ج متشابه ہیں،
 اس لیے اب : ا د = ا د : ا ج
 یعنی اب : ا د = ا د : ا ج

دوسرے درجہ کے احم کی ترتیبی یا ہندی طریق قیمت نکالنا

مثال - (۱) $\overline{۱۵}$ (۲) $\overline{۲۱۵}$ کی تقریبی قیمت معلوم کرو۔

(۱) $\overline{۱۵} = \overline{۱۵} \times ۱$ ، کسی مناسب اکائی کی رقوم میں ۵ اور ۱ کو بالترتیب
 اب اور ا ج کے مساوی لو اور ان کے درمیان وسط تناسب معلوم کرو۔

چونکہ اب : ا د = ا د : ا ج

اس لیے $\overline{۱۵} = \overline{۱۵} \times ۱$

$$۵ = ۱ \times ۵ =$$

اس لیے ا د = $\overline{۱۵}$

ا د کو ناپنے سے $\overline{۱۵}$ کی قیمت تقریباً ۲۲ و ۲ معلوم ہوتی ہے۔

(۲) $\overline{۲۱۵} = \overline{۲۱۵} \times ۳$ ، یہاں اب، ا ج کو بالترتیب ۳ سنی میٹر اور

۳ سنی میٹر کے مساوی لو اور پہلے کی طرح عمل کرو۔

نوٹ - اجزائے ضربی اس طرح منتخب کیے جائیں کہ اب، ا ج کے

مناسب طول ہوں۔

$$\text{مثلاً } \overline{۲۱۵} = \overline{۲۱۵} \times ۱۰، \overline{۲۱۵} \times ۵ = \overline{۱۱۰۵}$$

تعریف

اگر ایک خط کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کیا جائے کہ تمام خط کو بڑے
 حصہ کے ساتھ جو نسبت ہو وہ بڑے حصہ کو چھوٹے حصہ کے ساتھ ہو تو ایسی تقسیم کو

ہم انتہائی اور وسطی تقسیم کھینکے۔

ب ل

مثلاً اب کی لا پر انتہائی اور وسطی نسبت سے تقسیم ہوگی اگر

$$اب : لا = لا : لاب$$

جس سے ظاہر ہے کہ $اب \times لا = لا^2$

یعنی کل خط اور ایک حصہ کی سطح دوسرے حصہ کے مربع کے مساوی ہے،
پس کسی خط کو مسئلہ عملی ۳۳ کی مدد سے انتہائی اور وسطی نسبت سے تقسیم
کر سکتے ہیں۔ عمل اور ثبوت کے لیے دیکھو [حصہ چہارم مسئلہ عملی ۳۳]

مشقیں

۱۔ ہندسی طریق پر (۱) $۱۵۶' ۱۵۵' ۲۵۳$ کا چوتھا تناسب معلوم کرو۔

(۲) $۱۵۵' ۲۵۵$ کا تیسرا تناسب معلوم کرو۔

(۳) ۵۶۲ سنتی میٹر اور ۵۵۰ سنتی میٹر کا وسط تناسب معلوم کرو۔

اور حساب سے اپنے نتائج کی جانچ کرو۔

۲۔ ۲۵۰ لمبے خط کو داخل اور خارجاً نسبت $۳ : ۷$ سے تقسیم کرو اور ہر صورت

میں حصوں کے طول پیمائش اور حساب سے معلوم کرو۔

۳۔ تناسب کے مندرجہ ذیل بیانات میں نامعلوم مقدار کی قیمتیں خالص ہندسی طریق پر

معلوم کرو۔ اور حساب سے اپنے نتائج کی جانچ کرو:

$$(۱) ۱۵۲۵ : لا = ۱۵۰ : ۱۵۶ [\text{ا کو طول کی اکائی مانو۔}]$$

$$(۲) لا : ۴۵۲ = ۴۵۳ : ۶۴۳ [\text{سنتی میٹر کو طول کی اکائی مانو۔}]$$

$$(۳) لا : ۱۶ = ۲۵ : لا [\text{ا کو ۱۰ کے مساوی لو۔}]$$

۴۔ ۵۶۲ سنتی میٹر لمبے خط کو تین حصوں میں تقسیم کرو جو ۲ ، ۳ ، ۴ کے

تناسب ہوں، اپنے عمل کی پیمائش اور حساب سے جانچ کرو۔

۵۔ ۹۳۱ لبا ایک خط ہے، اس کو تین حصوں میں تقسیم کرو اس طرح کہ دوسرا حصہ

= پہلے کا $\frac{2}{3}$ ، اور تیسرا = دوسرے کا $\frac{1}{3}$

۶۔ ۱۵۵ لمبے ضلع پر مستطیل بناؤ جس کا رقبہ ۲۰ ضلع والے مربع کے مساوی ہو،

مستطیل کے دوسرے ضلع کی پیمائش کرو۔

۷۔ تریسیمی طریق پر ذیل کی اصم مقداروں کی تقریبی قیمتیں معلوم کرو۔

$$(1) \sqrt{34}, (2) \sqrt{106}, (3) \sqrt{\frac{13}{5}}$$

۸۔ ہندسی عمل سے ذیل کے جملات کی تقریبی قیمتیں معلوم کرو اور ہر صورت میں

اپنے نتیجہ کی حساب سے تصدیق کرو:

$$(1) \frac{253 \times 255}{258}, (2) \frac{4683}{2613}, (3) \frac{1624 \times 2661}{1651}$$

۹۔ ذیل کے محیطات میں سے ہر ایک کی بنا پر مثلث ا ب ج بناؤ اور ہر صورت

میں اس کے اضلاع کے طول محسوب کرو اور ان کو ناپو:

$$(1) \text{ محیط } = 368 \text{ اور } \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

$$(2) \text{ محیط } = 11 \text{ اسنٹی میٹر اور } \frac{1}{4} = \frac{1}{3} = \frac{2}{5} = \frac{3}{4} = \frac{4}{5}$$

$$(3) \text{ محیط } = 15 \text{ اسنٹی میٹر اور } \frac{1}{2} = \frac{1}{3} = \frac{2}{5} = \frac{3}{4} = \frac{4}{5}$$

$$(4) \text{ } 10 = 100 \text{ اور } \frac{1}{5} = \frac{1}{4} = \frac{2}{5} = \frac{3}{4} = \frac{4}{5}$$

مشقیں

[بلند یوں اور فاصلوں کے محسوب کرنے میں تناسب کا استعمال]

۱۔ ایک خاکہ میں ایک کھیت مثلث ا ب ج سے تعبیر ہوتا ہے جس میں

ا = ۸ اسنٹی میٹر، ب = ۵۶ اسنٹی میٹر، ج = ۶۴ اسنٹی میٹر، اگر کھیت کا سب سے

بڑا ضلع ۲۰۰ میٹر ہو تو دوسرے ضلعوں کے طول دریافت کرو۔

خاکہ میں کھیت کی ایک باڑ خط ن ق کے ذریعہ دکھائی گئی ہے جو ب ج کے متوازی ہے اور ایسے نقطہ ن میں سے گذرتی ہے جو ا ب میں نقطہ ۱ سے ۴۰ سنتی میٹر کے فاصلہ پر ہے، باڑ کا طول معلوم کرو۔

۲۔ ۱ اور ب کی رفتاروں میں نسبت ۸ : ۷ کی ہے، تو یہی طریق پر معلوم کرو کہ ۱۰۰ گز کی دوڑ میں کتنے گز سے ۱، ب سے جیت جائیگا اگر دونوں کی رفتار یکساں مانی جائے۔

۳۔ ایک نقشہ میں ۱، ۲۵ میل کو تعبیر کرتا ہے، اس پر تین جگہوں ۱، ب، ج کا نشان دیا گیا ہے، ان میں سے ب، ۱ کے شمال مغرب کی جانب ۸۰۰ یڈ پر ہے اور ج، ۱ کے شمال مشرق کی طرف فاصلہ ۵۰۰ یڈ پر ہے، ب اور ج کے درمیان حقیقی فاصلہ معلوم کرو۔

۴۔ ایک شخص جس کی اونچائی ۶ فٹ ہے ایک قندیل کے کھمبے سے ۳۲ فٹ کے فاصلہ پر کھڑا ہے، وہ دیکھتا ہے کہ قندیل کی وجہ سے اُس کا سایہ جو زمین پر پڑتا ہے اُس کا طول ۸ فٹ ہے، بتاؤ کہ لمپ زمین سے کتنا اونچا ہے اور ۵ فٹ اونچے لڑکے کا سایہ جو کھمبے سے ۲۰ فٹ کے فاصلہ پر ہو کتنا لمبا ہوگا۔

۵۔ ایک شخص ۶ فٹ لمبا، ایک قندیل کے کھمبے سے ۱۵ فٹ کے فاصلہ پر کھڑا ہے اور اس کے سایہ کا طول جو قندیل کی روشنی کی وجہ سے زمین پر پڑتا ہے ۵ فٹ ہے، بتاؤ کہ قندیل کی اونچائی کیا ہے اور اگر وہ شخص کھمبے کی جانب ۸ فٹ آگے بڑھے تو اس کے سایہ کا طول کیا ہوگا۔

۶۔ ایک شخص ایک نہر کی چوڑائی معلوم کرنا چاہتا ہے، اُس نے نہر کے ایک کنارے ۱۰ فٹ اونچی سلاخ نصب کی، پھر وہ اس کنارے سے عموداً اتنا فاصلہ پیچھے ہٹا کہ سلاخ کی چوٹی اور مقابل کنارہ عین ایک خط مستقیم میں دکھائی دیں۔ اگر اس کی آنکھ کی اونچائی ۵ فٹ ۸ انچ ہو اور اس کا فاصلہ نزدیک کے کنارہ سے ۲۰ فٹ ہو تو نہر کی چوڑائی دریافت کرو۔

۷۔ ایک برج کی بلندی معلوم کرنے کے لیے ایک شخص نے ۱۲ فٹ اونچا جھنڈا برج سے ۲۰ فٹ کے فاصلہ پر انتصاباً کھڑا کیا، پھر وہ بلحاظ برج کے، جھنڈے سے

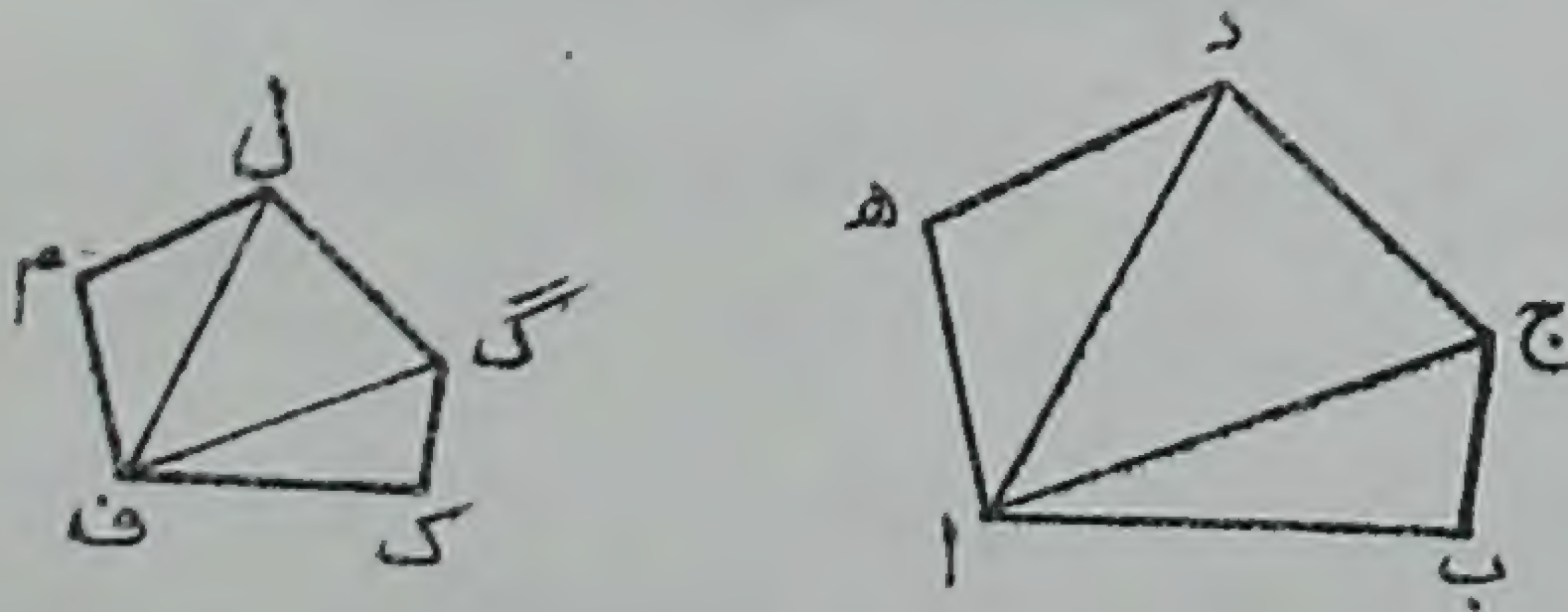
۳ فٹ پرے ہٹا اور اس نے دیکھا کہ جھنڈے اور برج کی چوٹیاں ایک ہی سیدھ میں ہیں، اگر اس کی آنکھ کی اونچائی ۵ فٹ ۴ انچ ہو تو برج کی بلندی معلوم کرو۔

۸ - ایک روشنی گھر کے جنوب میں ایک شخص کھڑا ہے اور وہ دیکھتا ہے کہ اس کا سایہ چوٹی پر کی روشنی کی وجہ سے ۲۴ فٹ لمبا ہے، مشرق کی طرف ۱۰۰ گز جانے پر اس کے سایہ کا طول ۳۰ فٹ ہو جاتا ہے، اگر اس کی اپنی اونچائی ۶ فٹ ہو تو سطح زمین سے روشنی کی بلندی معلوم کرو۔

متشابه اشکال

مسئلہ اثباتی ۶۷

متشابه کثیرالاضلاع متشابه مثلثوں کی ایک ہی تعداد میں تقسیم ہو سکتے ہیں، اور ہر شکل میں متناظر راسوں کو جو خط ملائے ہیں وہ متناسب ہوتے ہیں۔



فرض کرو کہ ا ب ج د ہ، ف ک گ ل م دو متشابه کثیرالاضلاع ہیں راس ا، راس ف کا جواب ہے، ب، ک کا وغیرہ وغیرہ۔ ا ج، ا د کو نیز ف گ، ف ل کو ملایا گیا ہے۔
یہ ثابت کرنا ہے کہ

(۱) مثلث ا ب ج، ف ک گ متشابه ہیں، نیز ا ج د اور ف گ ل متشابه ہیں، ا د ہ اور ف ل م متشابه ہیں۔

(۲) ا ب : ف ک = ا ج : ف گ = ا د : ف ل

ثبوت۔ (۱) چونکہ کثیرالاضلاع متشابه ہیں۔

اس لیے ا ب ج = ف ک گ

اور ا ب : ف ک = ب ج : ک گ

اس لیے ۵ اب ج اور ف ک گ کتاب میں مسئلہ ۱۱

اس لیے ۵ ب ج ا = ۵ ک گ ف

لیکن چونکہ کثیر الاصناف کتاب ہیں اس لیے

۵ ب ج د = ۵ ک گ ل

اس لیے ۵ ا ج د = ۵ ف گ ل

یہ ا ج ا ف گ = ب ج ا ک گ کیونکہ ۵ اب ج ' ف ک گ کتاب میں

= ج د : گ ل کیونکہ کثیر الاصناف کتاب ہیں۔

یعنی زوایا ا ج د اور ف گ ل کے گرد کے اصناف کتاب میں۔

اس لیے ۵ ا ج د ' ف گ ل کتاب میں۔ مسئلہ ۱۲

اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ ۵ ا د ہ ' ف ل م کتاب میں۔

(۲) اور اب ا ف ک = ا ج ا ف گ کتاب میں اب ج اور ف ک گ ہے

= ا د : ف ل کتاب میں ج ا د اور گ ف ل ہے۔

نوٹ :- اوپر کے مسئلوں میں دو متضاد دعووں میں سے خدا کیجئے سے

کثیر الاصناف کتاب میں خطوں میں تقسیم

کیا گیا ہے۔ لیکن یہ قید ضروری نہیں۔

کثیر الاصناف اب ج د ہ

میں کوئی نقطہ و اور اسے

ہر اس کے ساتھ بناؤ۔

کثیر الاصناف ف ک گ ل م

میں ۵ ک ف و ک د ب ا و کے

سادہ بناؤ اور ۵ ف ک و ک د ا ب و کے سادہ بناؤ۔

و ک کثیر الاصناف ف ک گ ل م کے ہر اس کے ساتھ بناؤ۔

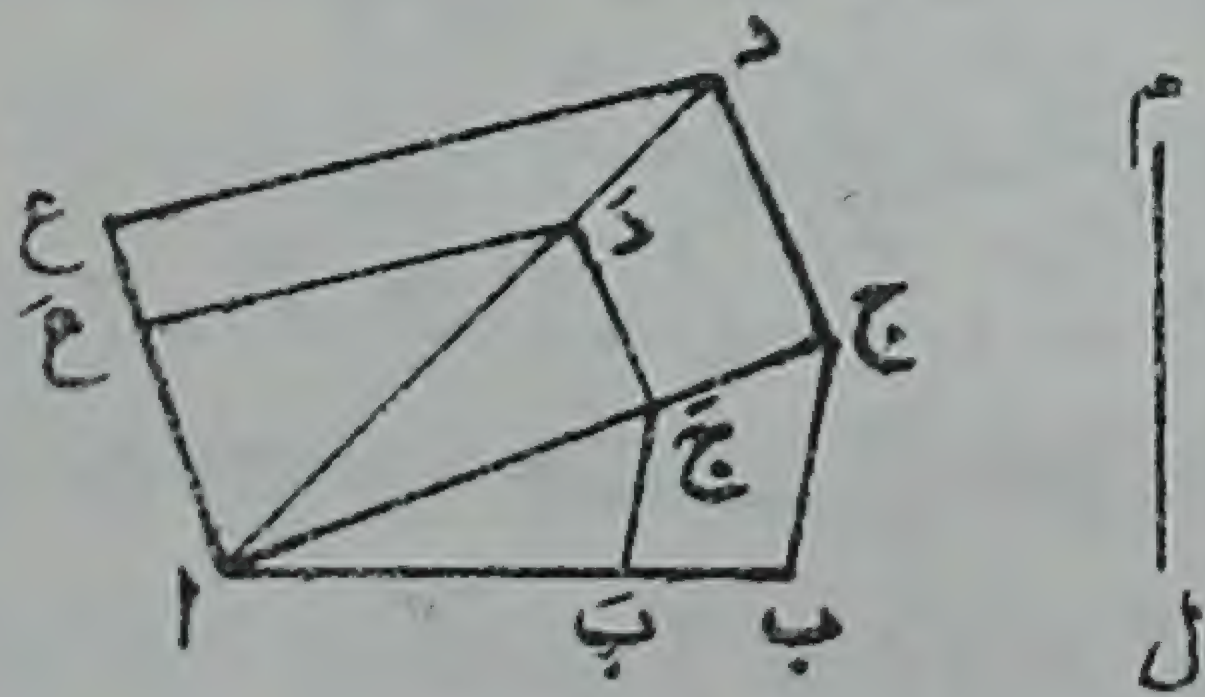
غالب علم اسے بطور شق کے ثابت کہہ کہ اس طرح سے وہ کثیر الاصناف

کتاب میں خطوں کی ایک ہی تعداد میں تقسیم ہو جاتے ہیں۔



مسئلہ عملی ۳۹ [پہلا طریقہ]

ایک ضلع پر جس کا طول دیا گیا ہے ایک شکل بناؤ جو ایک معلومہ مستقیم الاضلاع شکل کے متشابه ہو۔



فرض کرو کہ اب ج د ع دی ہوئی شکل ہے اور ل م معلومہ ضلع کا طول ہے،
فرض کرو کہ اس ضلع کو اب کا جواب ہونا مقصود ہے۔

عمل - اب سے اب، ل م کے مساوی کاٹو، اج، ا د کو ملاؤ۔
ب سے ب ج، ب ج کے متوازی کھینچو کہ یہ اج سے ج پر ملے۔
ج سے ج د، ج د کے متوازی کھینچو کہ یہ ا د سے د پر ملے۔
د سے د ع، د ع کے متوازی کھینچو کہ یہ ا ع سے ع پر ملے۔
تب اب ج د ع مطلوبہ شکل ہوگی۔

ثبوت کا خاکہ - (۱) عمل کی رو سے اشکال اب ج د ع،

اب ج د ع متساوی الزوایا ہیں۔

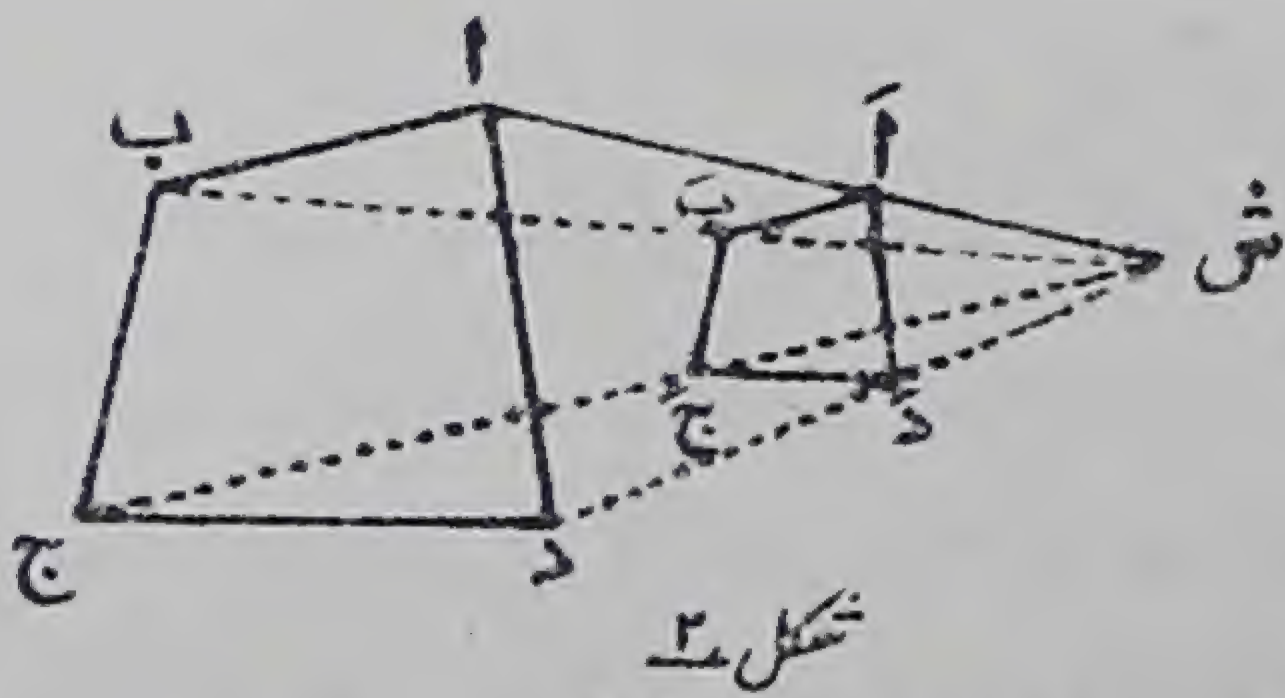
(۲) متشابه مثلثوں کے تین جوڑوں سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\frac{اب}{اب} = \frac{ب ج}{ب ج} = \frac{ج د}{ج د} = \frac{د ع}{د ع} = \frac{ا ع}{ا ع}$$

یعنی کثیر الاضلاعوں کے متناظر ضلع متناسب ہیں۔

مسئلہ اثباتی ۶۸

کوئی دو متشابه مستقیم الاضلاع اشکال اس طرح رکھی جاسکتی ہیں کہ متناظر راسوں کے ملائے والے خط ایک ہی نقطہ میں سے گزریں۔



فرض کرو کہ ABC اور $A'B'C'$ دو متشابه اشکال ہیں۔
چونکہ $\angle B = \angle B'$ اس لیے شکلوں کو اس طرح رکھا جاسکتا ہے کہ
 AB ، $B'C'$ بالترتیب متوازی ہوں AB ، $B'C'$ کے۔ نیز چونکہ شکلیں
متساوی الزوایا ہیں، اس لیے ظاہر ہے کہ AC متوازی ہے $A'C'$ کے اور
 BC متوازی ہے $B'C'$ کے۔

اب یہ ثابت کرنا ہے کہ جب دی ہوئی اشکال کے متناظر اضلاع
متوازی ہوں تو AA' ، BB' ، CC' ، DD' ہم نقطہ ہونگے۔
 AA' کو ملاؤ اس کو خارجاً S پر نسبت $AB : A'B'$ سے تقسیم کرو۔
 S سے B اور S سے B' کو ملاؤ۔ ہم یہ ثابت کریں گے کہ S سے B اور
 S سے B' دونوں ایک ہی خط میں واقع ہیں۔

ثبوت۔ مثلثوں SAB ، SAB' میں چونکہ AB اور $A'B'$
متوازی ہیں

اس لیے $\angle SBA = \angle SBA'$ ، $\angle SAB = \angle SA'B'$

$SA : SB = SA' : SB'$

اور از روئے عمل

اس لیے مثلث ش ا ب ، ش ا ب مساوی الزوایا ہیں - مسئلہ ۶۱۲

اس لیے $\angle ش ا ب = \angle ش ا ب$

اس لیے ش ب اور ش ب ایک ہی خط مستقیم میں واقع ہیں

یعنی ب ب ثابت نقطہ ش میں سے گذر رہا ہے -

اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ج ج ، د د نقطہ ش میں سے گذرتے ہیں

یعنی ا ا ، ب ب ، ج ج ، د د ہم نقطہ ہیں -

نوٹ - یہ قابل توجہ ہے کہ خط ا ا ، ب ب ، ج ج ، د د سب

نقطہ ش میں سے گذرتے ہیں اور ان میں سے ہر ایک کی نقطہ ش پر اشکال کے

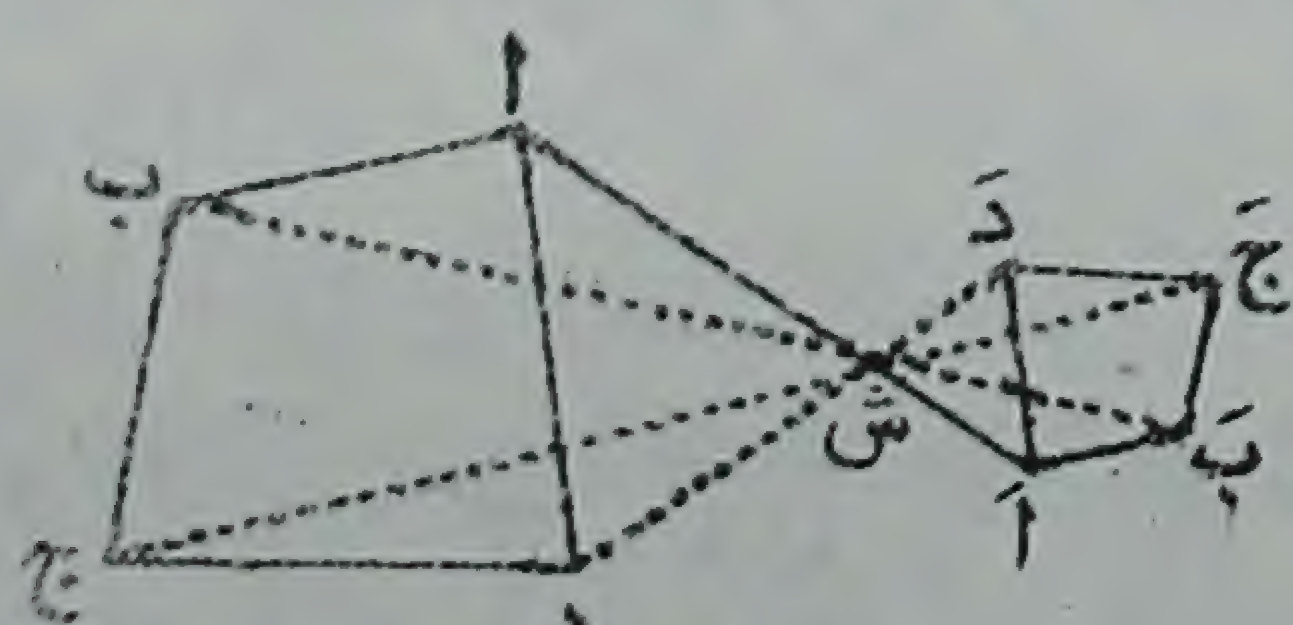
کسی دو متناظر اضلاع کی نسبت سے خارجاً تقسیم ہوتی ہے -

نوٹ - اشکال کو اس طرح رکھتے ہیں کہ ا ا ، ب ب بالترتیب

ا ب ، ب ج کے متوازی ہوں دو صورتیں پیدا ہوتی ہیں:

(۱) ا ب اور ا ب کا رخ ایک ہی ہو جیسے اشکال ۱ اور ۲

(۲) ا ب اور ا ب کے رخ متقابل ہوں ملاحظہ ہو شکل ۳ -



شکل ۳

موازا ذکر صورت میں بھی ہم دیکھیں گے کہ ج ج د متوازی ہے ج د کے اور

د ا متوازی ہے د ا کے اور یہ پہلے کی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ ا ا ، ب ب

ج ج ، د د ، ہم نقطہ ہیں - لیکن اس صورت میں ش ، ا ا کو متناظر اضلاع

کی نسبت میں د ا خلا تقسیم کرتا ہے اور شکلوں کا محل بیجاظ ایک دوسرے کے

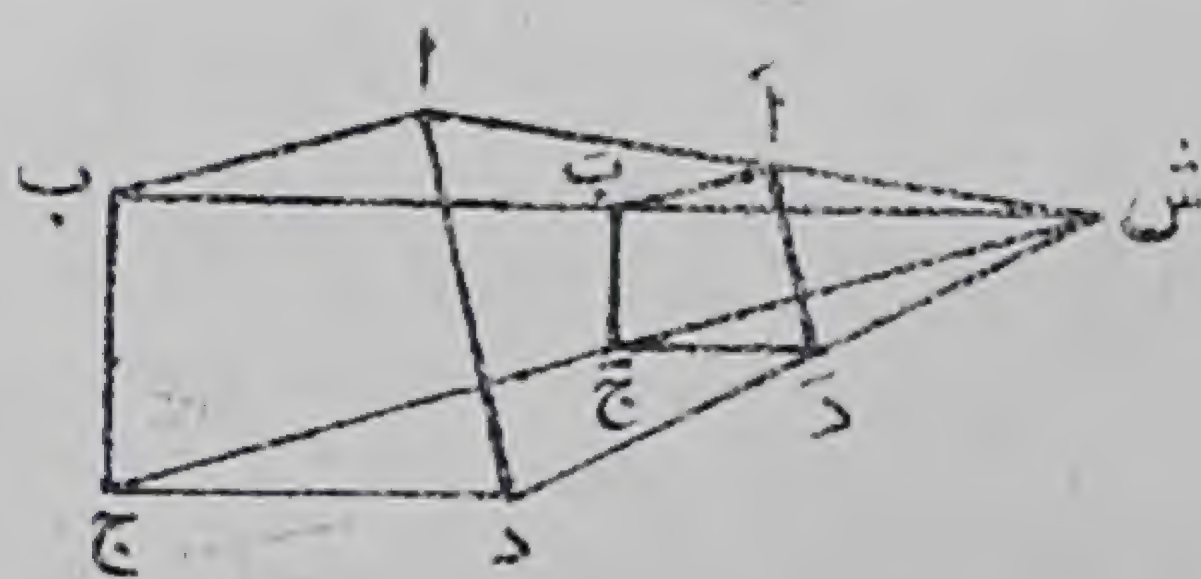
آڑا ہوگا -

ہر صورت میں ش کو تثابہ یا ہم وضعیت کا مرکز کہتے ہیں اور تثابہ

اشکال جو اس طرح رکھی جائیں ہم وضع کہلاتی ہیں -

سُند علی ۴۹ [دوسرا طریقہ]

دیے ہوئے ضلع پر ایک شکل کھینچو جو ایک اور معلومہ شکل کے متشابه ہو۔



فرض کرو کہ اب ج د معلومہ شکل ہے، اب دیا ہوا ضلع ہے اور اب کو ضلع اب کا جواب ہونا مقصود ہے۔
عمل۔ اب کو اب کے متوازی رکھو۔ اور ا، ب د کو ملاؤ اور انہیں بڑھاؤ کہ یہ شی پر ملیں۔

ش.ج.، ش.د. کو ملاؤ۔

بِا میں سے بِ ج، ب ج کے متوازی کھینچو کہ یہ ش ج سے ج پر ملے،
ج میں سے ج د، ج د کے متوازی کھینچو کہ یہ ش د سے د پر ملے،
آ د کو ملاؤ،

تب آب جَد مطلوبہ شکل ہوگی۔

طالب علم ثابت کرے کہ (۱) آبِ حَ د اور ا ب ج د
متساوی الزدایا ہیں (۲) ان شکلوں کے متناظر ضلعے متناسب ہیں۔
یہ ثبوت مسئلہ ۶.۸ کا عکس ہے۔

۱۔ اس کو مرکزِ تشابہ مانئے ہوئے مثلث کے اندر مربع بناؤ اس طرح پر کہ اس کے دو اس قاعدہ ب ج پر واقع ہوں اور باقی دو بالترتیب ا ب اور ا ج پر ہوں۔

۶۔ مثلث ا ب ج بناؤ جس میں $۱ = ۶، ۶ = ۲، ۲ = ۱۱۰$ ، ب ج = ۲۵۔

مثلث ا ب ج میں مثلث مساوی الاضلاع بناؤ

(۱) جس کا ایک ضلع ب ج کے متوازی ہو۔

(۲) جس کا ایک ضلع ایک دیے ہوئے خط کے متوازی ہو۔

۷۔ مثلث ا ب ج کے اندر ایک مثلث بناؤ جو ایک دیے ہوئے مثلث

د ع ف کے متشابہ ہو۔

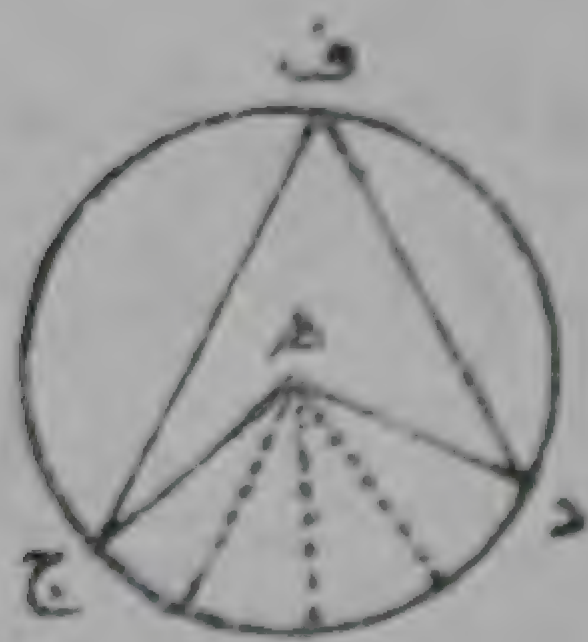
بتاؤ کہ یہ عمل کتنی طرح سے ہو سکتا ہے۔

۸۔ ضلع ۱۲۱ پر منتظم سدس ا ب ج د ع ف بناؤ اور اس کے اندر

ایک مربع بناؤ جس کے دو ضلع ا ب اور د ع کے متوازی ہوں اور اس کے اس سدس کے باقی اضلاع پر واقع ہوں۔

مسئلہ اثباتی ۶۹ [اقلیدس م ۶ ش ۳۳]

مساوی دائروں میں مرکز پر کے یا محیط پر کے زاویوں کی باہمی نسبت وہی ہوتی ہے جو اُن قوسوں کی نسبت ہو جن پر وہ قائم ہیں۔



فرض کرو کہ ا ب ع، ج د ف مساوی دائرے ہیں اور زاویے

زیر بحث مرکز پر اگ ب، ج ہ د ہیں اور محیط پر ا ع ب اور ج ف د
جو بالترتیب قوس اب اور ج د پر قائم ہیں۔
یہ ثابت کرنا ہے کہ

$$(۱) \text{ اگ ب : ج ہ د } = \text{ قوس اب : قوس ج د }$$

$$(۲) \text{ ا ع ب : ج ف د } = \text{ قوس اب : قوس ج د }$$

ثبوت - فرض کرو کہ قوس اب : قوس ج د = م : ن

یعنی اگر قوس اب کو م مساوی حصوں میں تقسیم کیا جائے تو قوس ج د ایسے ن
مساوی حصوں میں تقسیم ہو سکتی ہے۔

ہر دائرہ میں فرض کرو کہ قوسوں اب، ج د کے نقاط تقسیم تک نیم قطر
کھینچے گئے ہیں۔

تب چونکہ زاویے اگ ب، ج ہ د مساوی دائروں میں واقع ہیں
اور ان کو ایسے زاویوں میں تقسیم کیا گیا ہے جو مساوی قوسوں پر قائم ہیں،
اس لیے یہ سب زاویے باہم مساوی ہیں۔

ایسے چھوٹے مساوی زاویے زاویہ اگ ب کے اندر م ہیں

اور زاویہ ج ہ د کے اندر ن ہیں۔

$$\text{اس لیے اگ ب : ج ہ د } = \text{ م : ن}$$

$$\text{پس اگ ب : ج ہ د } = \text{ قوس اب : قوس ج د}$$

اور چونکہ ا ع ب = اگ ب کا نصف (مسئلہ ۳۸)

اور د ج ف د = ج ہ د کا نصف

$$\text{اس لیے ا ع ب : ج ف د } = \text{ قوس اب : قوس ج د}$$

نتیجہ صریح - چونکہ مساوی دائروں میں ایسے قطاع جن کے

مرکزی زاویے مساوی ہوں خود مساوی ہوتے ہیں [مسئلہ ۴۲، نتیجہ صریح]

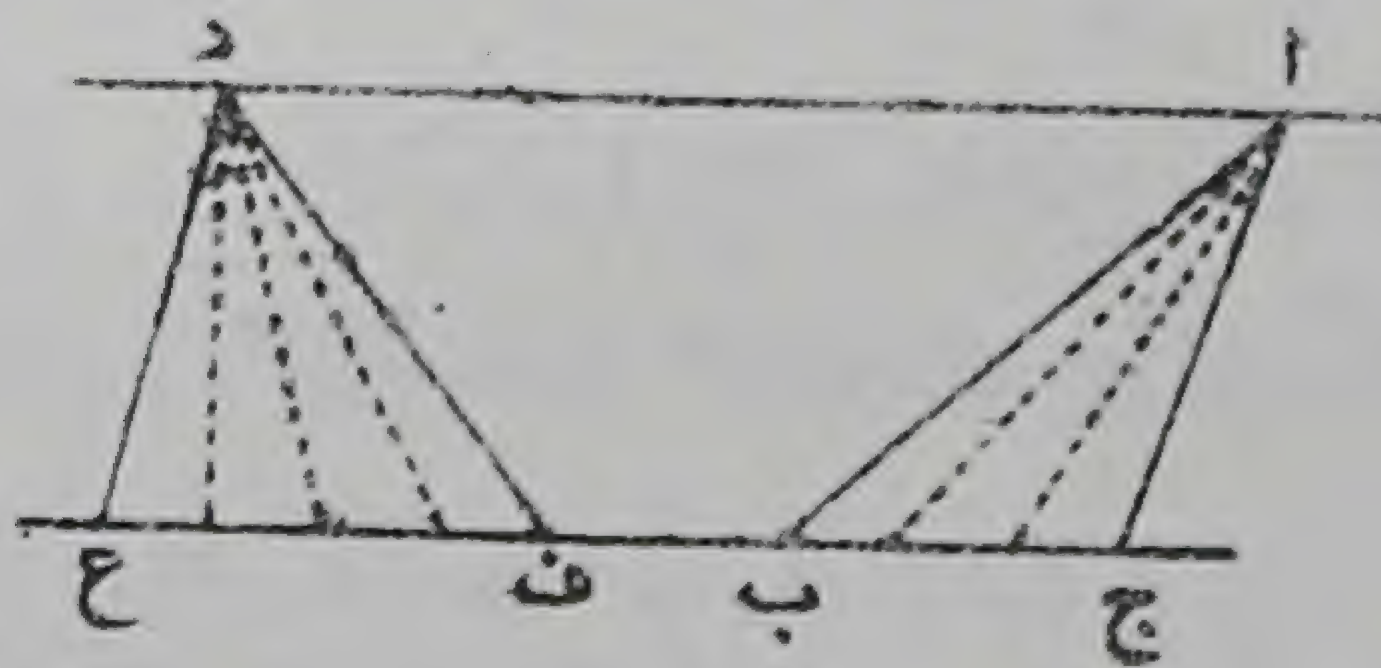
اس لیے حسب بالا ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{قطاع اگ ب : قطاع ج ہ د } = \text{ قوس اب : قوس ج د}$$

تناسب رقبوں سے متعلق

مسئلہ اثباتی ۷۰ [اقلیدس ۳۴ ش ۱]

جن مثلثوں کے ارتفاع مساوی ہوں ان کے رقبوں میں وہی نسبت ہوتی ہے جو ان کے قاعدوں میں۔



فرض کرو کہ ا ب ج ، د ع ف دو مثلث ہیں جن کے ارتفاع مساوی ہیں اور ان کے قاعدے ب ج ، ع ف ہیں۔
یہ ثابت کرنا ہے کہ

$$\Delta ا ب ج : \Delta د ع ف = ب ج : ع ف$$

ثبوت۔ مثلثوں کو اس طرح رکھو کہ قاعدے ب ج اور ع ف ایک ہی خط مستقیم میں واقع ہوں اور دونوں مثلث خط کے ایک ہی جانب ہوں۔ ا د کو طواؤ، تب ا د، ب ف کے متوازی ہوگا۔ [تعریف ۲، صفحہ ۲۰۲ ترجمہ کلمن]

فرض کرو کہ قاعدہ ب ج : قاعدہ ع ف = م : ن

یعنی اگر ضلع ب ج کو م مساوی حصوں میں تقسیم کیا جائے تو ع ف کو ایسے ن مساوی حصوں میں تقسیم کیا جائیگا۔

ہر مثلث میں فرض کرو کہ اس سے ب ج ، ع ف کے نقاط تقسیم

خطوط کھینچے گئے ہیں۔

اب مثلثوں ا ب ج اور د ع ف کو ایسے مثلثوں میں تقسیم کیا گیا ہے جن کے ارتفاع مساوی ہیں اور جو مساوی قاعدوں پر قائم ہیں، اس لیے یہ سب مثلثات مساوی ہیں۔

۵ ا ب ج میں ایسے چھوٹے مساوی مثلثوں کی تعداد م ہے۔

اور ۵ د ع ف میں تعداد ن ہے۔

اس لیے ۵ ا ب ج : ۵ د ع ف = م : ن

اس لیے ۵ ا ب ج : ۵ د ع ف = ب ج : ع ف

نتیجہ صریح — جن متوازی الاضلاعوں کے ارتفاع مساوی ہوں ان کے رقبوں میں وہی نسبت ہوتی ہے جو ان کے قاعدوں میں۔

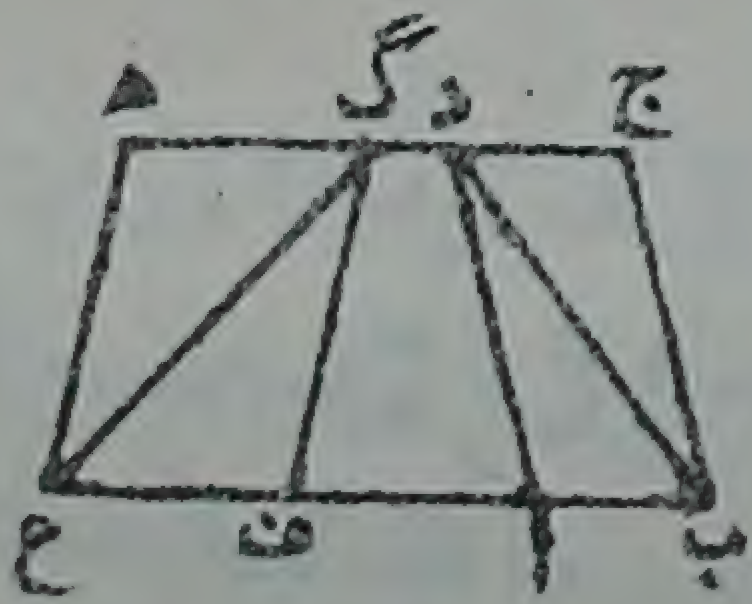
فرض کرو کہ ا ج اور ف ہ متوازی الاضلاع ہیں، ان کے ارتفاع

مساوی ہیں اور ان کے قاعدے بالترتیب

ا ب اور ع ف ہیں۔

ب د، ع گ کو ملاؤ۔

چونکہ



متوازی الاضلاع ا ج = دو چند ۵ ا ب د

اور متوازی الاضلاع ع ف ہ = دو چند ۵ ع ف گ

اس لیے متوازی الاضلاع ا ج : متوازی الاضلاع ع ف ہ

= ۵ ا ب د : ۵ ع ف گ

= ا ب : ع ف

مسئلہ ۱ کا متبادل ثبوت

فرض کرو کہ مثلثوں ا ب ج، د ع ف میں سے ہر ایک کا ارتفاع

ع ہے۔

$$\Delta \text{ ا ب ج کا رقبہ} = \frac{1}{4} \text{ قاعدہ} \times \text{ارتفاع} = \frac{1}{4} \text{ ب ج} \times \text{ع}$$

$$\Delta \text{ د ع ف کا رقبہ} = \frac{1}{4} \text{ قاعدہ} \times \text{ارتفاع} = \frac{1}{4} \text{ ع ف} \times \text{ع}$$

$$\text{اس لیے} \frac{\Delta \text{ ا ب ج}}{\Delta \text{ د ع ف}} = \frac{\frac{1}{4} \text{ ب ج} \times \text{ع}}{\frac{1}{4} \text{ ع ف} \times \text{ع}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ع ف}}$$

مشقیں

(عدد دی)

۱۔ دو مثلثوں کے ارتفاع مساوی ہیں اور ان کے قاعدے بالترتیب ۳ و ۵ ہیں، اگر پہلے مثلث کا رقبہ $\frac{1}{4} \times 12$ مربع انچ ہو تو دوسرے کا رقبہ معلوم کرو۔

۲۔ دو مثلثوں کے ارتفاع مساوی ہیں اور ان کے رقبوں کی نسبت ۲۴ : ۱۷ ہے، اگر پہلے مثلث کا قاعدہ ۲ و ۴ سنتی میٹر ہو تو دوسرے کا قاعدہ قریب ترین ملی میٹر تک معلوم کرو۔

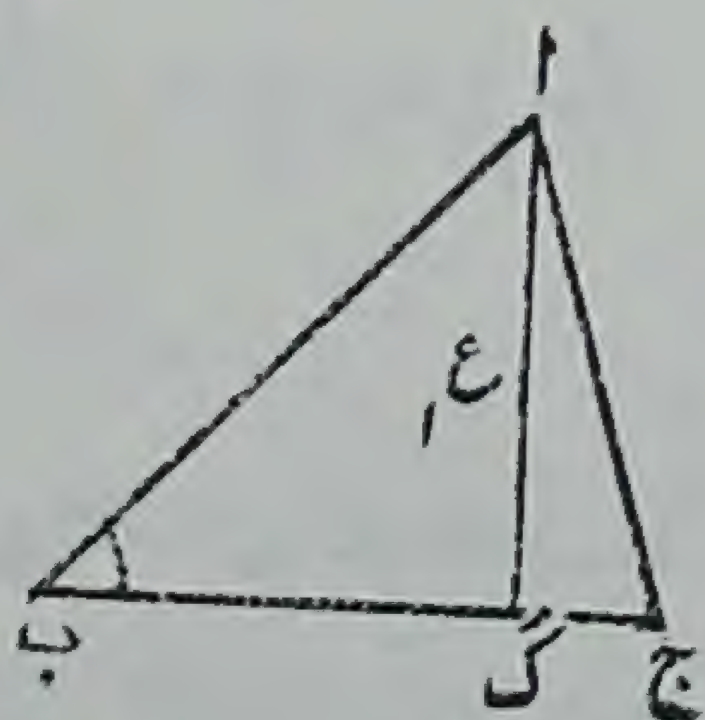
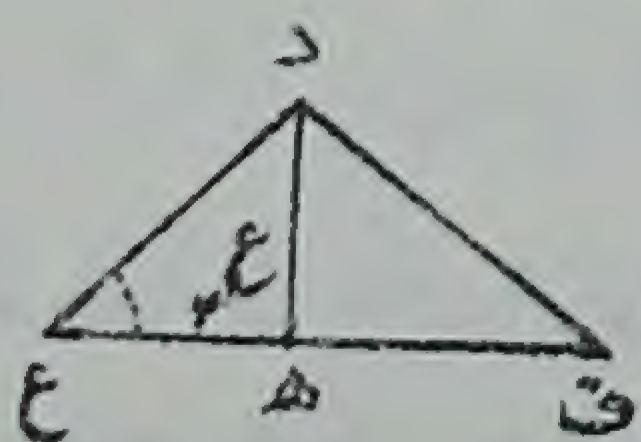
۳۔ دو مثلث ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں، ان کے قاعدے بالترتیب ۲۰ و ۱۴ میٹر اور ۴۰ و ۲۰ میٹر ہیں، اگر پہلے مثلث کا رقبہ ۵۰ و ۱۲۰ مربع میٹر ہو تو دوسرے مثلث کا رقبہ قریب ترین مربع سنتی میٹر تک معلوم کرو۔

۴۔ دو متوازی الاضلاع جن کے رقبوں کی نسبت ۵ : ۳ ہے ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں۔ اگر پہلے متوازی الاضلاع کا قاعدہ ۶ و ۹ ہو تو دوسرے کا قاعدہ معلوم کرو۔

۵۔ دو مثلثی کھیت ایک ہی قاعدہ کی متقابل جانبوں میں واقع ہیں اور ان کے ارتفاع اس قاعدہ سے ۲۰ و ۴۰ جریب اور ۱۷ و ۳۰ جریب ہیں۔ اگر پہلے کھیت کا رقبہ ۱۸ ایکڑ ہو تو تمام دو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ ایکڑوں میں معلوم کرو۔

مسئلہ اثباتی ۱۷

اگر دو مثلثوں میں ایک کا ایک زاویہ دوسرے کے ایک زاویہ کے مساوی ہو تو ان کے رقبے مساوی زاویوں کے گرو کے اضلاع کی سطحوں (حاصل ضربوں) کے متناسب ہونگے۔



فرض کرو کہ مثلثوں ا ب ج اور د ع ف میں زاویہ ب = زاویہ ع
یہ ثابت کرنا ہے کہ

ا ب ج : د ع ف = ا ب × ب ج : د ع × ع ف
اور د سے مقابل کے اضلاع ب ج، ع ف پر بالترتیب عمود
ع، ع کھینچو۔

اثبات - ا ب ج : د ع ف = ا ب ج × ب ج : د ع ف × ع ف

اس لیے $\frac{ا ب ج}{د ع ف} = \frac{ا ب ج \times ب ج}{د ع ف \times ع ف}$ (۱)

لیکن چونکہ د ب = د ع اور د گ = د ہ،

اس لیے ا ب ج اور د ع ہ مساوی الزوایا ہیں مسئلہ ۱۶

اس لیے $\frac{ا ب}{د ع} = \frac{ا ب}{د ع}$ (۲) مسئلہ ۶۲

$\frac{ع}{ب}$ کی قیمت (۱) میں مندرج کرنے سے

$$\frac{ا ب \times ج}{د ع \times ف} = \frac{ا ب ج}{د ع ف}$$

یا $ا ب ج : د ع ف = ا ب \times ج : د ع \times ف$

نتیجہ صریح — اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ۱۔ ایسے متوازی الاضلاعوں کے رقبے جن میں سے ایک کا ایک زاویہ دوسرے کے ایک زاویہ کے مساوی ہو، مساوی زاویوں کے گرد کے اضلاع کی سطحوں (حاصل ضربوں) کے متناسب ہوتے ہیں۔

رقبوں پر مشقیں

(مسئلہ ۱۰ پر)

۱۔ یہ مان کر کہ مثلث کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ قاعدہ \times ارتفاع، ثابت کرو کہ جو مثلث مساوی قاعدوں پر قائم ہوں اُن کے رقبے اُن کے ارتفاعوں کے متناسب ہوتے ہیں۔

نیز اس نتیجہ کو ہندی طریق پر مسئلہ ۱۰ سے حاصل کرو۔

۲۔ مثلث ا ب ج کے قاعدہ ب ج کے متوازی خط لا ما کھینچا گیا ہے جو اضلاع ا ب اور ا ج کو بالترتیب لا اور ما پر قطع کرتا ہے۔
ب ما اور ج لا کو ملاؤ اور مسئلہ ۱۰ کے ذریعہ ثابت کرو کہ

(۱) $الا : لاب = ا ما : ما ج$

(۲) $اب : ا لا = ا ج : ا ما$

۳۔ ثابت کرو کہ ذواربۃ الاضلاع کے قطر اس کو ایسے چار مثلثوں میں تقسیم کرتے ہیں جن کے رقبے متناسب ہوتے ہیں۔
 ۴۔ دو مثلثوں کے قاعدے مساوی ہیں اور یہ ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں، ثابت کرو کہ قاعدوں کے متوازی کوئی خط مثلثوں سے مساوی رقبے قطع کرتا ہے۔

(مسئلہ ۱ء پید)

۵۔ دو مثلثوں اب ج، د ع ف میں د ب = د ع اور اب = د ع، ثابت کرو کہ
 ب ج = ۳، ۵ = د ع، د ع = ۲، ۴ = ع ف، ۵، ۸ = ثابت کرو کہ
 د اب ج : د ع ف = ۲ : ۵

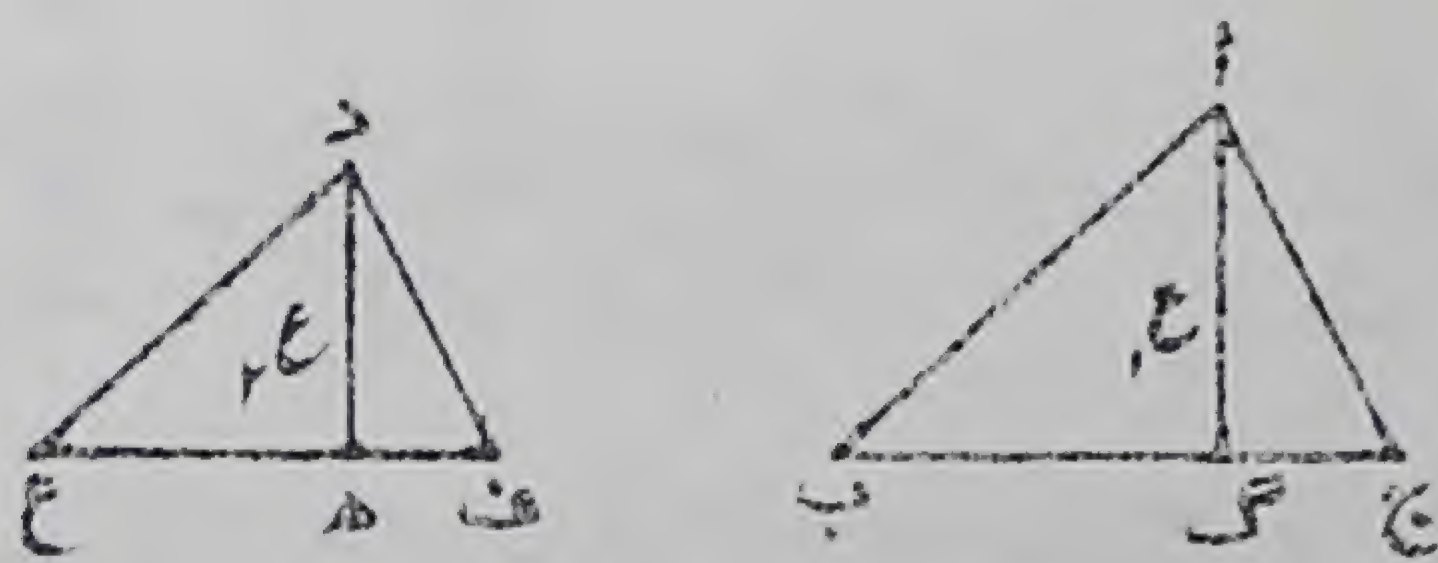
۶۔ مثلث اب ج اور د ع ف رقبہ میں مساوی ہیں، د ب = د ع،
 اگر اب = ۵، ۶ = سنتی میٹر، ب ج = ۳، ۴ = سنتی میٹر، د ع = ۲، ۵ = سنتی میٹر تو ع ف معلوم کرو۔
 ۷۔ دو متوازی الاضلاعوں اب ج د، ع ف گ ہ میں د ب = د ع ف
 اور ان کے رقبوں کی نسبت ۳ : ۴ ہے۔ اگر اب = ۵، ۸ = سنتی میٹر، ب ج = ۳، ۴ = سنتی میٹر، ع ف = ۱۰، ۸ = سنتی میٹر، تو ف گ کا طول معلوم کرو۔

اگر ا اور ع سے ب ج اور ف گ پر کے عمودوں کے طول بالترتیب
 ع، ع ہوں تو ثابت کرو کہ ع : ع = ۳ : ۹
 ۸۔ یہ ضابطہ ثابت کرو۔ مثلث کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ اب جب ج اور اس سے
 مسئلہ ۱ء حاصل کرو۔

۹۔ د اب ج = د ع ف بلحاظ رقبہ اور اب : د ع = ع ف : ب ج،
 ثابت کرو کہ زاویے ب اور ع یا باہم مساوی ہیں یا ایک دوسرے کے مکمل۔
 ۱۰۔ کوئی خط مثلث اب ج کے ضلعوں اب اور ج کو بالترتیب
 ن اور ق پر کاٹتا ہے، ن ج کو ملانے اور مسئلہ ۱۰ کو دوبار لگانے سے ثابت کرو کہ
 د ان ق : د اب ج = ان × اق : اب × ج
 اس سے مسئلہ ۱ء کا متبادل ثبوت حاصل کرو۔

مسئلہ اثباتی ۱۷ [اقلیدس ص ۶۱۹]

متشابه مثلثوں کے رقبے اُن کے متناظر اضلاع کے مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں۔



فرض کرو کہ ا ب ج ، د ع ف متشابه مثلث ہیں اور ب ج ، ع ف ان کے متناظر اضلاع ہیں۔
یہ ثابت کرنا ہے کہ

۵ ا ب ج : ۵ د ع ف = ب ج : ع ف
۱ اور د سے اضلاع ب ج اور ع ف پر بالترتیب عمود نکالے گئے ہیں، ان کے طول فرض کرو کہ ع اور ع ہیں۔

ثبوت۔ ۵ ا ب ج = $\frac{1}{2}$ ب ج \times ع ، ۵ د ع ف

$$= \frac{1}{2} ع ف \times ع$$

اس لیے $\frac{۵ ا ب ج}{۵ د ع ف} = \frac{ب ج \times ع}{ع ف \times ع}$ (۱)

لیکن چونکہ متشابه مثلثوں ا ب ج ، د ع ف سے د ب = ع گ اور د گ = ع ہ جو دونوں قائمے ہیں

اس لیے ۵ ا ب گ ، د ع ہ متساوی الزوایا ہیں۔

مسئلہ ۶۲

$$\text{اس لیے } \frac{ع_۱}{ع_۲} = \frac{ا_۱}{د_۲}$$

$$\frac{ب_۱ ج_۱}{ع_۱ ف_۱} = \frac{ب_۲ ج_۲}{ع_۲ ف_۲} \quad \text{متشابه مثلثوں ا ب ج ، د ع ف سے}$$

(۱) میں $\frac{ع_۱}{ع_۲}$ کی بجائے مندرجہ کرنے سے

$$\frac{ا_۱ ب_۱ ج_۱}{د_۱ ع_۱ ف_۱} = \frac{ب_۱ ج_۱ \times ج_۲}{ع_۱ ف_۱ \times ع_۲} = \frac{ب_۲ ج_۲}{ع_۲ ف_۲}$$

$$یا \quad ا_۱ ب_۱ ج_۱ : د_۱ ع_۱ ف_۱ = ب_۲ ج_۲ : ع_۲ ف_۲$$

متشابه مثلثوں کے رقبوں کے متعلق مشقیں

(عددی اور توسیعی)

۱۔ مثلث ا ب ج میں قاعدہ کے متوازی خط لا ما کھینچا گیا ہے جو اضلاع ا ب اور ا ج کو بالترتیب لا اور ما پر قطع کرتا ہے، اگر لا، ا ب کا ایک تہائی ہو تو معلوم کرو کہ لا ما، ا ب ج کا کتناواں حصہ ہے؟

۲۔ دو متشابه مثلثوں کے دو متناظر اضلاع بالترتیب ۳ فٹ ۶ انچ اور ۴ فٹ ۳ انچ ہیں۔ اگر بڑے مثلث کا رقبہ ۴۵ مربع فٹ ہو تو چھوٹے کا رقبہ معلوم کرو۔

۳۔ مثلث ا ب ج کا رقبہ ۲۵۶ مربع سنتی میٹر ہے، خط لا ما، ا ب ج کے متوازی کھینچا گیا ہے جو ا ب کو نسبت ۵ : ۳ سے قطع کرتا ہے۔ مثلث لا ما کا رقبہ دریافت کرو۔

۴۔ دو متشابه مثلثوں کے رقبے بالترتیب ۳۹۲ مربع سنتی میٹر اور ۲۰۰ مربع سنتی میٹر ہیں، ان کے متناظر اضلاع کے کسی جوڑے کی نسبت معلوم کرو۔

۵۔ ا ب ج، لا ما سے دو متشابه مثلث ہیں اور ان کے رقبے بالترتیب

۳۲ مربع انچ اور ۶.۵ مربع انچ ہیں، اگر لاما = ۷.۷ تو متناظر ضلع ۱ ب کا طول معلوم کرو۔

۷۔ بناؤ کہ مثلث ۱ ب ج میں قاعدہ ۱ ب ج کے متوازی خط لاما کس طرح کھینچا جائے کہ ۱ لاما کا رقبہ ۱ ب ج کے رقبہ کا $\frac{9}{14}$ ہو۔

(نظری)

۶۔ ۱ ب ج ایک مثلث ہے جس کا زاویہ ۱ قائمہ ہے، ۱ سے ۱ ب ج پر عمود ۱ د نکالا گیا ہے، ثابت کرو کہ

$$۵ \text{ ب } ۱ \text{ د} : ۵ \text{ ا } ۵ \text{ ج} \text{ د} = ۲ \text{ ب } ۱ : ۲ \text{ ا } ۵ \text{ ج}^۲$$

۸۔ منحرف ۱ ب ج د کے اضلاع ۱ ب ج د متوازی ہیں اور اس کے قطر و پر تقاطع کرتے ہیں۔ اگر ۱ ب ج د کا دو چہند ہو تو مثلث ۱ و ب کی نسبت مثلث ۱ ج و د کے ساتھ معلوم کرو۔

۹۔ مثلث ۱ ب ج میں قاعدہ ۱ ب ج کے متوازی خط لاما کھینچا گیا ہے، اگر

$$۵ \text{ لاما} : \text{شکل لاما ب ج ما} = ۵ : ۴$$

$$۱ : ۲ = \text{لا} : \text{لا ب}$$

تو ثابت کرو کہ

۱۰۔ ثابت کرو کہ متشابه مثلثوں کے رقبوں میں وہی نسبت ہوتی ہے جو ان کے

(۱) متناظر ارتفاعوں

(۲) متناظر وسطانیوں

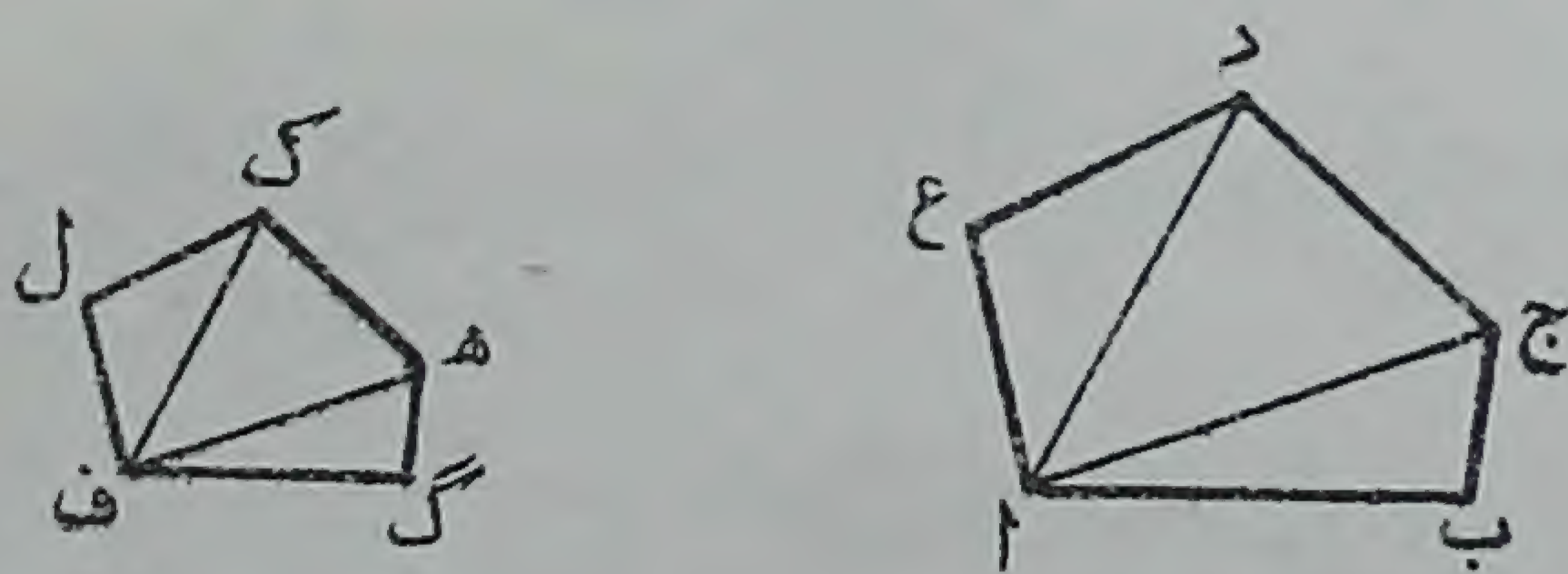
(۳) اندرونی دائروں کے نیم قطروں

(۴) حائل دائروں کے نیم قطروں

کے مربعوں میں ہو۔

مسئلہ اثباتی ۳۷ [اقلیدس م ۶ ش ۲۰]

متشابه کثیرالاضلاعوں کے رقبے ان کے متناظر اضلاع کے مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں۔



فرض کرو کہ ا ب ج د ع، ف گ ه ک ل متشابه کثیرالاضلاع اشکال ہیں، اور ا ب، ف گ ان کے متناظر ضلعے ہیں۔
یہ ثابت کرنا ہے کہ

کثیرالاضلاع ا ب ج د ع : کثیرالاضلاع ف گ ه ک ل = ا ب : ف گ
ا ج، ا د، ف ه، ف ک کو ملاؤ۔

ثبوت۔ ا ب ج اور ه ف گ متشابه ہیں
نیز ا ج د اور ف ه ک متشابه ہیں
نیز ا د ع اور ف ک ل متشابه ہیں

اس لیے ا ب ج : ه ف گ = ا ج : ف ه
مسئلہ ۲۷
= ا ج د : ه ف ک

اسی طرح

ا ج د : ه ف ک = ا د : ف ک

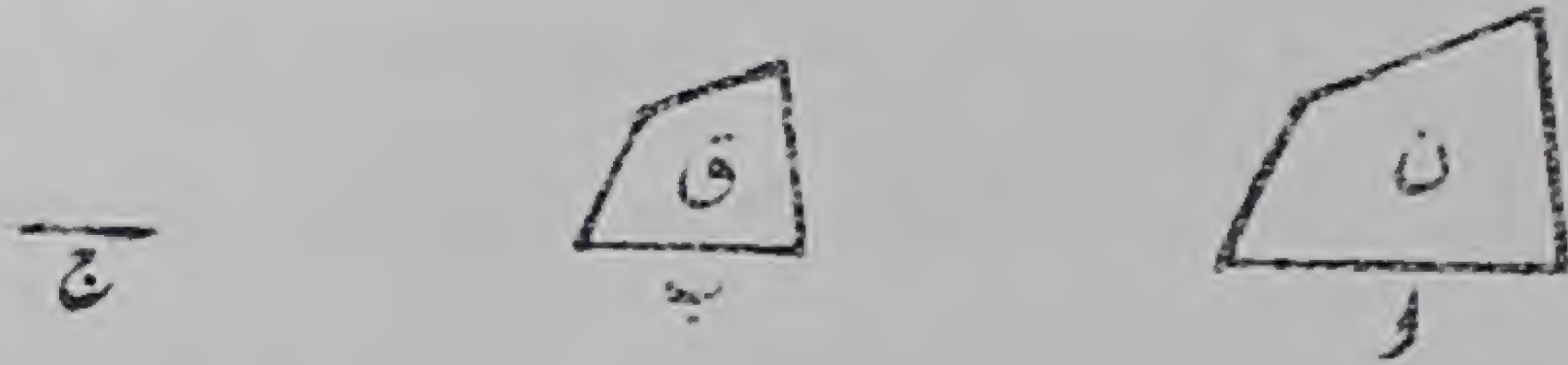
= ا ج د ع : ه ف ک ل

$$\frac{\Delta \text{ ا ب ج}}{\Delta \text{ ف گ ہ}} = \frac{\Delta \text{ ا ج د}}{\Delta \text{ ف گ ہ}} = \frac{\Delta \text{ ا د ع}}{\Delta \text{ ف ک ل}}$$

اور ان مساوی نسبتوں کے سلسلہ میں مقدموں کے مجموعہ کو موخروں کے مجموعہ کے ساتھ وہی نسبت ہے جو کسی مقدم کو اس کے موخر کے ساتھ ہو۔ مسئلہ ۵ صفحہ ۷
اس لیے شکل ا ب ج د ع : ف گ ہ ک ل = ا ب ج : ف گ ہ
= ا ب : ف گ

نتیجہ صریح ۱ - فرض کرو کہ تین خط تناسب میں ہیں اور وہ ا ب ج سے تعبیر ہوتے ہیں یعنی

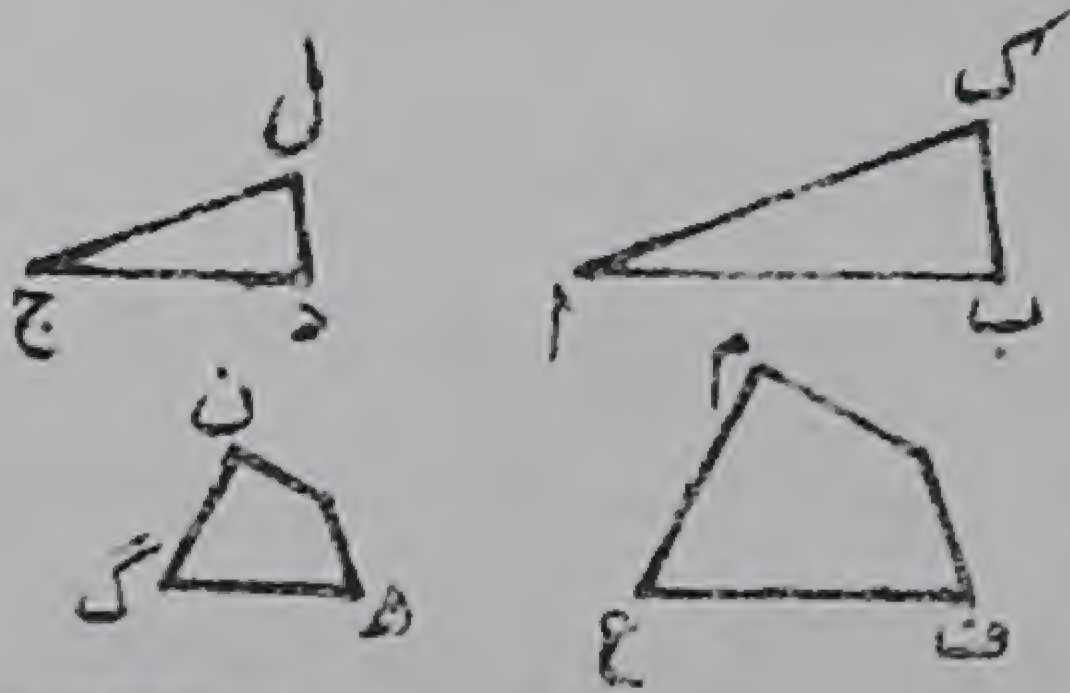
$$\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ج} \quad \text{اس لیے } ا ب = ا ج$$



اب فرض کرو کہ ا اور ب کو متناظر ضلعے مان کر متشابه شکلیں ن اور ق کھینچی گئی ہیں،

$$\frac{\text{شکل ن}}{\text{شکل ق}} = \frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ا ج} = \frac{ا}{ج}$$

پس اگر تین خط تناسب میں ہوں اور پہلے اور دوسرے کو متناظر اضلاع مان کر ان پر متشابه شکلیں بنائی جائیں تو پہلے خط پر کی شکل : دوسرے خط پر کی شکل = پہلا خط : تیسرا خط



نتیجہ صریح ۲ - فرض کرو کہ

ا ب : ج د = ع ف : گ ہ
نیز فرض کرو کہ ا ب اور ج د ہر

متشابه شکلیں ک ا ب اور ل ج د بلحاظ ان ضلعوں کے متشابه طور پر بنائی گئی ہیں،
نیز ع ف اور گ ہ پر متشابه شکلیں م ف اور ن ہ متشابه طور پر بنائی گئی ہیں۔

$$\text{اب چونکہ} \quad \frac{\text{اب}}{\text{ج د}} = \frac{\text{ع ف}}{\text{گ ہ}}$$

$$\text{اس لیے} \quad \frac{\text{اب}^2}{\text{ج د}^2} = \frac{\text{ع ف}^2}{\text{گ ہ}^2}$$

لیکن شکل ک ا ب : شکل ل ج د = ا ب : ج د
اور شکل م ف : شکل ن ہ = ع ف : گ ہ
اس لیے شکل ک ا ب : شکل ل ج د = شکل م ف : شکل ن ہ

اس لیے معلوم ہوا کہ اگر چار خط متناسب ہوں اور ان میں سے
پہلے اور دوسرے پر متشابه مستقیم الاضلاع ۴ شکل متشابه طور پر بنائی
جائیں، اور اسی طرح تیسرے اور چوتھے خط پر شکلیں بنائی جائیں تو یہ شکلیں
متناسب ہونگی۔

متشابه اشکال کے رقبوں کے متعلق مشقیں

(عددی اور تفسیری)

۱۔ مثلث ا ب ج کے قاعدہ ب ج کے متوازی ایسا خط لاھا کھینچنا مقصود
ہے کہ مثلث ا لاھا کا رقبہ مثلث ا ب ج کے رقبہ کا $\frac{۲}{۹}$ وال حصہ ہو۔

۲۔ مثلث کے ضلع بالترتیب ۲۰، ۲۵، ۳۰، ۳۵ ہیں، اس متشابه
مثلث کے اضلاع معلوم کرو جس کا رقبہ اس مثلث کا تین گنا ہو۔

[نتائج انچ کے قریب ترین سوویں حصہ تک صحیح ہوں]

۳۔ دو متشابه مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ۱۳۶۹ : ۱۶۵۸۱ ہے بڑے کا ارتفاع

۱۰ فٹ ۳ انچ ہے۔ چھوٹے کا ارتفاع معلوم کرو۔

۴۔ مثلث ا ب ج کا رقبہ ۱۶ مربع سنتی میٹر ہے، ب ج کے متوازی خط

لا ما کھینچا گیا ہے، نقطہ لا، اب کو نسبت ۳ : ۵ سے تقسیم کرتا ہے، اگر ب ما کو ملایا جائے تو مثلث ب لا ما کا رقبہ دریافت کرو۔

۵۔ خط لا ما مثلث ا ب ج کے قاعدہ ب ج کے متوازی کھینچا گیا ہے اور یہ مثلث سے رقبہ کا $\frac{1}{4}$ واں حصہ قطع کرتا ہے۔ اگر ب ج = ۱۰ سم تو لا ما کا طول قریب ترین ملی میٹر تک دریافت کرو۔

۶۔ منتظم مخمس ضلع ۵، ۲ پر بنایا گیا ہے اور اس کا رقبہ $\frac{3}{4}$ ۱۰ مربع انچ ہے، اس کے متشابه شکل مخمس کا رقبہ معلوم کرو جو ضلع ۳ پر بنایا جائے۔

۷۔ ایک مستطیلی رقبہ کا طول ۸.۴ میٹر ہے، اس کے ضلعوں کی نسبت ۱۲ : ۵ ہے۔ دوسرے متشابه مستطیل کے اضلاع معلوم کرو جس کا رقبہ پہلے مستطیل کے رقبہ کا $\frac{1}{9}$ ہو۔

۸۔ ایک کھیت کے خاکہ میں ۱، ۶ گز کو تعبیر کرتا ہے، اگر کل خاکہ کا رقبہ ۱۰۰ مربع انچ ہو تو کھیت کا رقبہ ایکروں میں دریافت کرو۔
بتاؤ کہ اس سوال میں کھیت کی شکل کا معلوم ہونا کیوں ضروری نہیں۔

۹۔ ایک جاگیر کا خاکہ شکل ذوالربعة الاضلاع ا ب ج د ہے جس کا پیمانہ ۲۵ فی میل ہے ۱ ج = ۲۰ اور ا ج سے ب اور د تک کے عمود بالترتیب ۲۴ اور ۲۶ ہیں، جاگیر کا رقبہ ایکروں میں دریافت کرو۔

۱۰۔ ایک کھیت کا رقبہ ۸۹، ۱ ہیکٹر ہے، اس کا خاکہ ایک مثلث ہے جس کے ضلع ۱۳، ۱۳، ۱۵ سنتی میٹر ہیں۔ بتاؤ کہ خاکہ کس پیمانہ پر کھینچا گیا ہے؟

متشابه اشکال کے رقبوں پر مشقیں

(نظری)

۱۔ مثلث ا ب ج کا زاویہ ا قائم ہے، اسے ب ج پر عمود ا د نکالا گیا ہے، ثابت کرو کہ

(۱) ب ج : ب ا = ب ج : ب د [مسئلہ ۴، نتیجہ صریح ۱]

(۲) ب ج : ج ا = ب ج : ج د

اس سے حاصل کرو کہ ب ج : ج ا = ب ج : ج د
۴۔ مثلث ا ب ج کے ضلع ب ج کے متوازی خط لا کر کھینچنے سے اس کی
تصنیف کی گئی ہے۔ نسبت ا : ب معلوم کرو۔
اس لیے معلوم کرو کہ قاعدہ کے متوازی خط کھینچنے سے مثلث کی کس طرح تصنیف
کی جاسکتی ہے۔

۵۔ دو دائروں کا خارجی تماس ا پر ہوتا ہے، ایک مشترک مماس انہیں
بالترتیب ب اور ج پر مس کرتا ہے، اور مرکزوں کے ملانے والے خط سے ش پر
ملتا ہے۔ اگر ا ب اور ا ج کو طایا جائے تو ثابت کرو کہ

د ش ب : ا : د ش ج = ش ب : ش ج

۶۔ دو دائرے ا اور ب پر تقاطع کرتے ہیں، اور ا پر دائروں کے مماس
کھینچے گئے ہیں اور یہ محیطوں سے ج اور د پر ملتے ہیں۔ اگر ا ب، ج ب، ب د کو
ملا یا جائے تو ثابت کرو کہ

د ج ب : ا : د ب ج = ج ب : ب د

۷۔ مثلث ا ب ج کا مثلث پائیں د ع ف ہے [حصہ سوم صفحہ ۱۳۵ ترجمہ مکمل]

ثابت کرو کہ د ا ب ج : د ب ج = ا ب : ب د
اس لیے ثابت کرو کہ

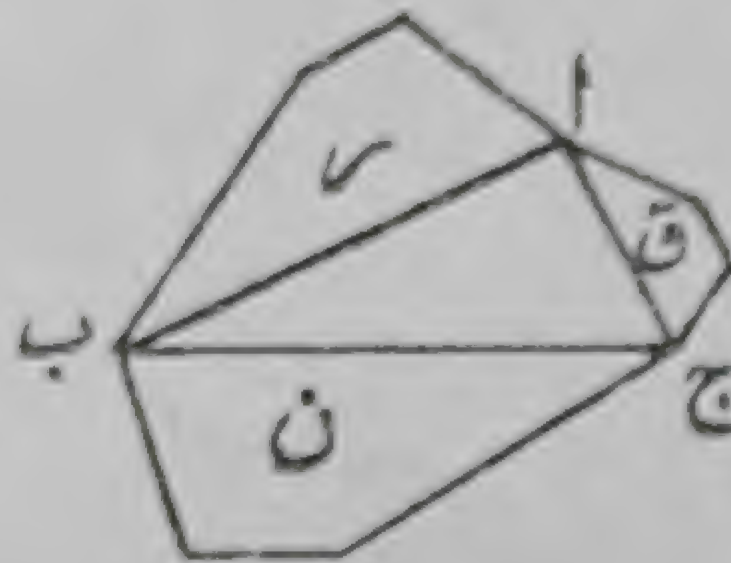
شکل ا ف د ج : د ب ج = ا د : ب د

۸۔ مثلث ا ب ج کے اندر اس کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے سے ایک
اور مثلث بنایا گیا ہے۔ اس نئے مثلث کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے سے تیسرا
مثلث بنایا گیا ہے اور اسی طرح۔ بتاؤ کہ چوتھا مثلث بلحاظ رقبہ کے اسی مثلث کا کونسا حصہ ہے؟
۹۔ اوستی میٹر کے ضلع پر منتظم مسدس شکل بنائی گئی ہے، اس کے اضلاع کے
وسطی نقاط کو ترتیب وار ملانے سے دوسری مسدس شکل بنائی گئی ہے وغیرہ وغیرہ۔ بتاؤ کہ
اصلی شکل کو پانچویں شکل سے بلحاظ رقبہ کیا نسبت ہے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ دو متشابه ہم محیط شکلوں کے رقبہ ان کے حائط دائروں کے
قطاروں کے مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں۔ [اقلیدس م ۱۲، شکل ۱۷]

مسئلہ اثباتی ۴۷ [اقلیدس ۴، ش ۳۱]

مثلث قائم الزوایہ میں کوئی شکل مستقیم الاضلاع، وتر پر بنائی گئی ہے، اس کے متشابه باقی دو اضلاع پر بھی متشابه شکلیں متشابه طور پر بنائی گئی ہیں، ثابت کرو کہ وتر پر کی شکل باقی دو شکلوں کے مساوی ہے۔



فرض کرو کہ $\triangle ABC$ مثلث قائم الزوایہ ہے، B ج اس کا وتر ہے، اور متشابه شکلیں N ، Q ، S اضلاع B ج، J ، A پر بالترتیب متشابه طور پر بنائی گئی ہیں۔

یہ ثابت کرنا ہے کہ

$$\text{شکل } S + \text{شکل } Q = \text{شکل } N$$

ثبوت - چونکہ متشابه اشکال S اور N کے متناظر الاضلاع A ب اور

B ج ہیں،

$$\text{اس لیے} \quad \frac{\text{شکل } S}{\text{شکل } N} = \frac{A^2 B^2}{B^2 J^2} \quad \dots \dots (1) \quad \text{مسئلہ ۳۷}$$

$$\text{اسی طرح} \quad \frac{\text{شکل } Q}{\text{شکل } N} = \frac{A^2 J^2}{B^2 J^2} \quad \dots \dots (2)$$

(۱) اور (۲) کے ہر طرف کی مساوی نسبتوں کو جمع کرنے سے

$$\frac{\text{شکل } S + \text{شکل } Q}{\text{شکل } N} = \frac{A^2 B^2 + A^2 J^2}{B^2 J^2}$$

مسئلہ ۲۹

لیکن $اب^۲ + ا^۲ ج^۲ = ب^۲ ج^۲$

اس لیے شکل س + شکل ق = شکل ن

نتیجہ۔ مثلث قائم الزاویہ کے وتر کو قطر مان کر جو دائرہ کھینچا جائے وہ باقی اضلاع پر کے دائروں کے مجموعہ کے مساوی ہوگا جو اسی طرح ان ضلعوں کو قطر مان کر کھینچے جائیں۔
یہ اس لیے کہ دائروں کے رقبے ان کے قطروں کے مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں۔
[حصہ سوم صفحہ ۱۲۸، ترجمہ مکملن]

مشقین

(متفرق)

۱۔ مثلث اب ج کا زاویہ قائمہ ہے، اد وتر پر عمود ہے، ثابت کرو کہ

$$(۱) ب^۲ ا^۲ = ب ج \times ب د \quad (۲) ج^۲ ا^۲ = ج ب \times ج د$$

اس لیے مسئلہ ۲۹ حاصل کرو کہ

$$ب ج^۲ = ب ا^۲ + ا ج^۲$$

۲۔ مسئلہ ۴ کی شکل میں ا سے ب ج پر اد عمود نکالو۔ اس طرح ثابت کرو کہ

اگر شکل ن = $ا ب \Delta$ ج، تو

$$(۱) شکل ق = ا د ج \quad (۲) شکل س = ا د ب$$

۳۔ مسئلہ ۳ کی شکل میں اگر اب : ا ج = ۵ : ۸ اور اگر شکل ن = ۹۸ مربع

سنتی میٹر تو اشکال ق اور س کے رقبے معلوم کرو۔

۴۔ ب ما اور ج مے مثلث اب ج کے وسطانے ہیں، اور یہ نقطہ

و پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ مثلث ب و ج کی نسبت مثلث ما و مے

کے ساتھ معلوم کرو۔

۵۔ $ا ب \Delta$ ج کے اضلاع اب اور ا ج مساوی ہیں اور ان میں سے

ہر ایک کا طول ۳۶ ہے۔ اب میں نقطہ د ایسا لیا گیا ہے کہ $ad = ۳۶$ ، د میں سے خط د ع کھینچا گیا ہے جو ا ج محدودہ سے ع پر ملتا ہے اور مثلث اد ع کا رقبہ اصلی مثلث اب ج کے رقبہ کے مساوی ہوتا ہے۔ ا ع کا طول معلوم کرو۔
۷۔ دائرہ کا قطر اب ہے، ا میں سے دو وتر ان، اق کھینچے گئے ہیں جو ب پر کے مماس سے لا اور ما پر ملتے ہیں۔

ثابت کرو کہ (۱) ان ق اور ا ما لا متشابه ہیں۔

(۲) چار نقطے ن، ق، ما، لا ایک دائرہ کے محیط پر واقع ہوتے ہیں۔

۸۔ مثلث اب ج کے زاویہ ا کا خارجی منصف قاعدہ ب ج سے د پر اور

اب ج کے حائط دائرہ سے ع پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ

$$ab \times aj = ac \times ad$$

۹۔ خط مستقیم کو انتہائی اور اوسط نسبت سے تقسیم کرنے سے کیا مراد ہے؟

اگر استقامتی میٹر لمبے خط مستقیم کو اس طرح تقسیم کیا جائے تو اس کے حصوں کا طول

معلوم کرو اور ترسیمی طریق پر اپنے نتیجہ کی جانچ کرو۔

۱۰۔ بلحاظ رقبہ کے مثلث اب ج کے مساوی ایک مثلث بناؤ جس کے دو ضلع

برابر ہوں اور جس کا راسی زاویہ ا کے برابر ہو۔

۱۱۔ دیے ہوئے قاعدہ پر مثلث بناؤ جس کے دو ضلع مساوی ہوں اور جو رقبہ

میں معلوم مثلث اب ج کے مساوی ہو۔

مسئلہ عملی ۳۰

ایک شکل بناؤ جو ایک دی ہوئی مستقیم الاضلاع شکل

کے متشابه ہو اور اس کے رقبہ کی کسی معلومہ کسر کے

مساوی ہو۔

مشقیں

۱۔ مثلث اب ج کو قاعدہ ب ج کے متوازی خط لایا جائے اور مساوی
حصوں میں تقسیم کرو۔ خط لایا اب پر واقع ہوتا ہے اور ماہی ۱۱ ج پر۔
(۱۱) حساب سے (۱۱) پانچویں سے نسبت الایا : اب معلوم کرو۔

۲۔ قاعدہ ب ج کے متوازی خط ان قی لایا جائے جس سے مثلث اب ج کو
تین مساوی حصوں میں تقسیم کرو۔ اگر ان اور لا خط اب پر واقع ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ان}{۱} = \frac{الا}{۱۱} = \frac{اب}{۳۱}$$

اس سے قاعدہ کے متوازی خطوط کے ذریعہ کسی مثلث کو ن مساوی حصوں میں
تقسیم کرنے کا عمل حاصل کرو۔

۳۔ مستطیل بناؤ جس کا طول ۶ سنٹی میٹر اور عرض ۵ سنٹی میٹر ہو، ایک مستطیل
بناؤ جس کا رقبہ اس مستطیل کا ایک چوتھائی ہو۔

قریب ترین میٹر تک اس کا طول پاپو اور حساب سے اپنے نتیجہ کی تصدیق کرو۔

۴۔ ذیل کے مسطبات کی بنا پر شکل اب ج د بنال

د ا د ا ا ا ب ب ب ج ج ج سنٹی میٹر ا د د د ج ج ج سنٹی میٹر

اس کے مستطیل ایک ذرا بہت الاستطاع بنانا جس کا رقبہ ۳۱ مربع سنٹی میٹر ہو اور

قریب ترین میٹر تک اس کے اس سطح کا طول معلوم کرو جو اب کا جواب ہے۔

۵۔ ۴ کے نصف قطر کے دائرہ کو دو ہم مرکز دائروں کے ذریعہ تین مساوی

حصوں میں تقسیم کرو۔

۶۔ شکل مستطیل الاستطاع بناؤ جو رقبہ میں ایک دی ہوئی شکل

ع کے مساوی ہو اور ایک معلومہ شکل ش کے متشابه ہو [تقریباً ۹ ش ۱۰] [تقریباً ۹ ش ۱۰]
[سب سے پہلے شکل ع اور ش کے مساوی مربعے حاصل کرو (دیکھو

محلی مسائل ۱۹ اور ۲۰)۔ فرض کرو کہ ان مربعوں کے ضلعے بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ ہیں۔
نیز ش کا ایک ضلع ش ہے۔

ب، و، ش کا چوتھا متناسب ف معلوم کرو یعنی ب : و = ش : ف
ف پر شکل ف بناؤ جو ش کے متشابه ہو اور ف، و، ش متناظر ضلعے ہوں۔
تب ف مطلوبہ شکل ہوگی۔

$$\frac{ف}{ش} = \frac{ف}{ش} = \frac{و}{ب} = \frac{ع}{ش}$$

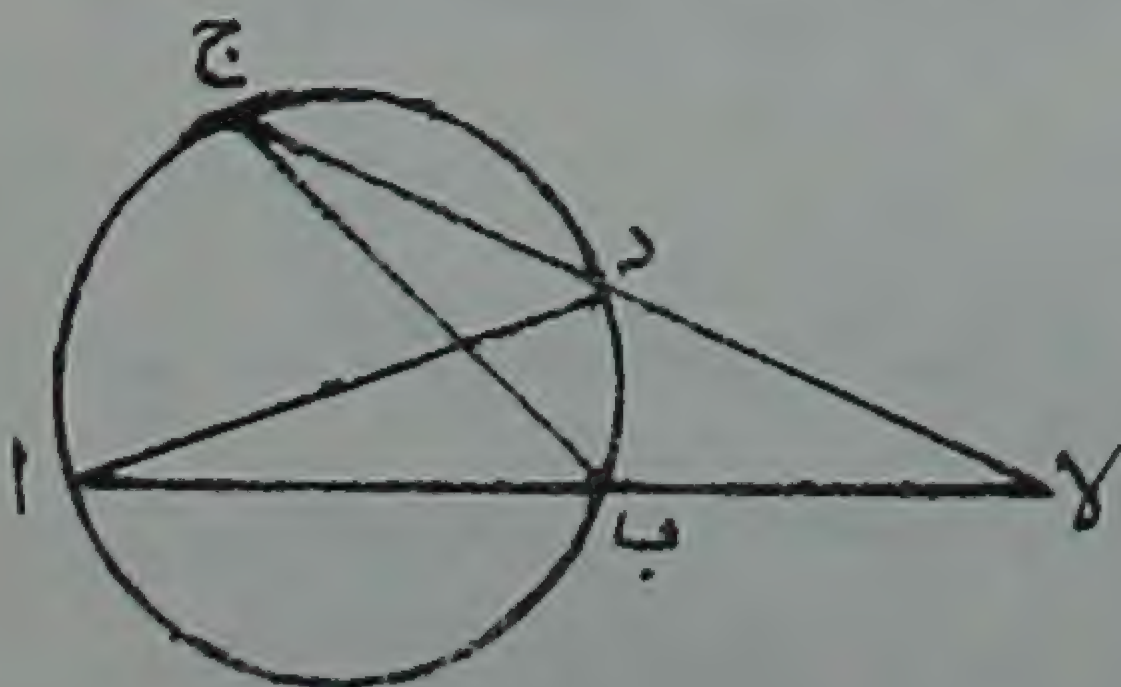
∴ شکل ف = شکل ع

سطحیں (حصّوں کے حامل ضرب) دائروں سے متعلق

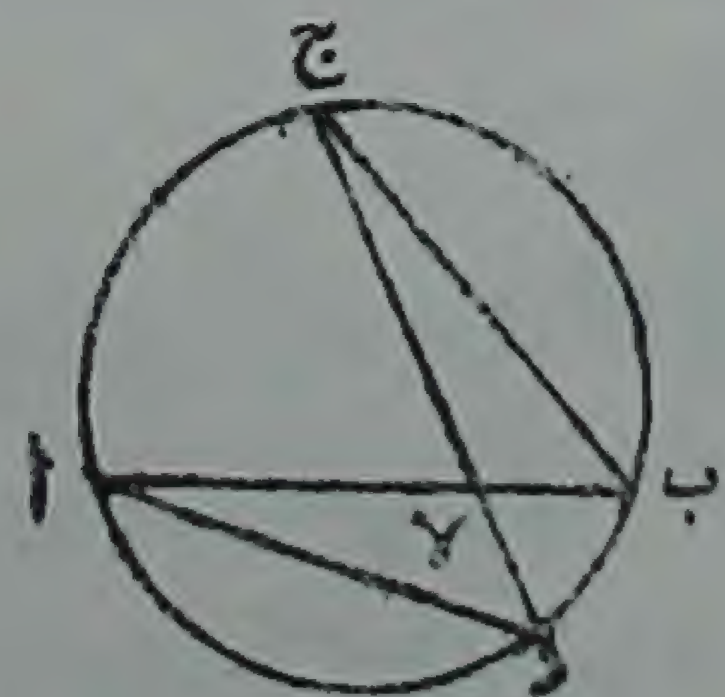
[نوٹ - مسئلہ ۵، ۵، ۵ دونوں کو ایک ہی دعوے میں لاکر ہم اس جگہ
ان کا ایک سادہ ثبوت درج کرتے ہیں، ملاحظہ ہو مسئلہ اثباتی ۵۹ کے اختتام پر نوٹ۔
ترجمہ مکمل]

مسئلہ اثباتی ۵، [اقلیدس م ۳، ش ۵، ۳۹]

دائرہ کے کوئی دو وتر ایک دوسرے کو داخل یا خارجاً قطع کرتے
ہیں، ثابت کرو کہ ایک وتر کے حصّوں کی سطح دوسرے وتر کے حصّوں
کی سطح کے مساوی ہے۔



شکل ۱



شکل ۲

دائرہ اب ج میں فرض کرو کہ وتر اب اور ج د ایک دوسرے سے کہ
نقطہ لا پر داخل قطع کرتے ہیں (شکل ۱) اور خارجاً قطع کرتے ہیں (شکل ۲)
دونوں صورتوں میں ثابت کرنا ہے کہ

$$\text{سطح لا ۱} = \text{لا ب} = \text{سطح لا ج} = \text{لا د}$$

۱ د، ب ج کو ملانے۔

ثبوت۔ مثلثوں الا د، ج لا ب میں

۱ الا د = ج لا ب، کیونکہ متقابل زاویے ہیں شکل ۱ میں

اور ایک ہی زاویہ ہے شکل ۲ میں

اور ۱ د = ج لا ب کیونکہ یہ محیط پر کے زاویے ہیں، ایک ہی قوس ب د پر

اس لیے باقی زاویے مساوی ہیں، مسئلہ ۱۶

اس لیے مثلث الا د، ج لا ب مساوی الزوایا ہیں

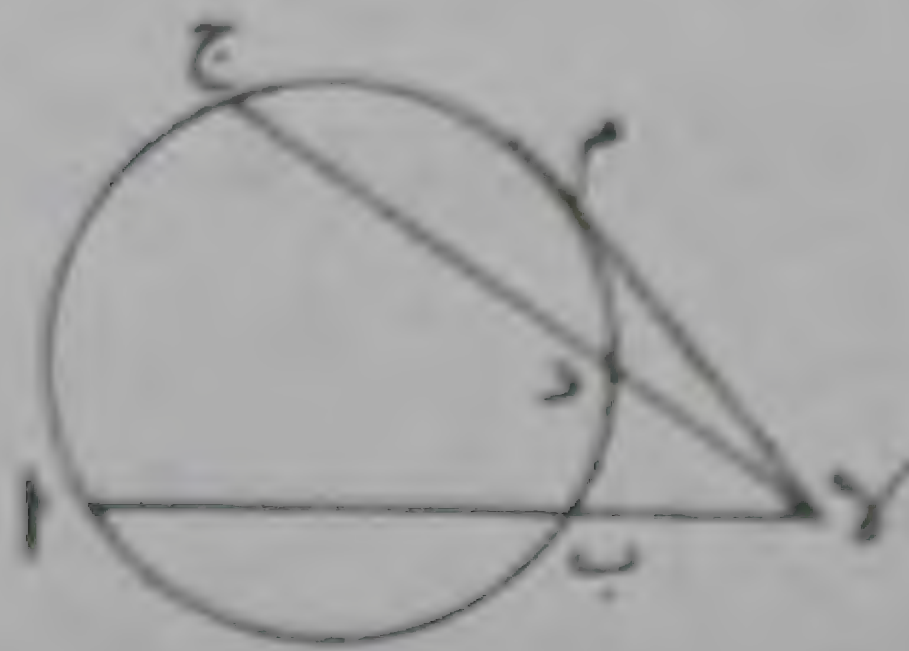
$$\text{اس لیے } \frac{\text{لا ۱}}{\text{لا ج}} = \frac{\text{لا د}}{\text{لا ب}}$$

$$\text{پس لا ۱} \times \text{لا ب} = \text{لا ج} \times \text{لا د}$$

$$\text{یعنی سطح لا ۱} = \text{لا ب} = \text{سطح لا ج} = \text{لا د}$$

نتیجہ صریح۔ اگر کسی بیرونی نقطہ سے دائرہ کا قاطع اور

ماس دونوں کھینچے جائیں تو قاطع اور قاطع کے اُس حصہ کی سطح جو دائرہ
کے باہر ہے ماس کے مربع کے مساوی ہوتی ہے۔



فرض کرو کہ نقطہ لا سے دائرہ ا ب ج کا لا ب ا قاطع کھینچا گیا ہے اور لام ماس -

یہ ثابت کرنا ہے کہ

$$لا \times لا ب = لا م^2$$

فرض کرو کہ لا د ج کوئی دوسرا قاطع ہے،

$$تب \quad لا \times لا ب = لا ج \times لا د \quad \text{مسئلہ ۱۰، شکل ۱}$$

اور یہ لا د ج کے سب مقامات کے لیے درست ہے۔

اب فرض کرو کہ لا د ج نقطہ لا کے گرد مرکز سے پرے گھومنا شروع کرتا

ہے اور نقاط ج اور د دائرہ کے محیط پر ایک دوسرے کے قریب آتے جاتے ہیں اور بالآخر وہ م پر ملتے ہو جاتے ہیں،

اس حالت میں لا د ج ماس لام بن جاتا ہے،

$$اور لا ج \times لا د بن جاتا ہے لام \times لام یعنی لام^2$$

پس اس انتہائی صورت میں لا \times لا ب = لام^2

مربع دار کاغذ کے لیے مشقیں

۱۔ نقطہ (۱، ۱) کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جو ماس سے اوپر مس کرتا ہے، اور ولا کو ۱ پر کاٹتا ہے۔ اگر ۱ میں سے کوئی خط کھینچا جائے جو و ما کو ق پر اور دائرہ کو ن پر کاٹے تو ثابت کرو کہ ۱ ن \times ۱ ق مستقل ہے، اور اس کی قیمت معلوم کرو جب کہ ۱ کو اکائی مانا جائے۔

۲۔ ج (۶، ۵) کو مرکز مان کر نصف قطر ۱۰ کا دائرہ کھینچا گیا ہے۔ نقطہ ن (۱۶، ۲۹) سے ماس کھینچے گئے ہیں جن کا وتر ماس ت ت ہے، اگر ن ج، ت ت سے ق پر ملے تو (۱) ج ق \times ج ن

(۲) ن ق \times ج ن (۳) ت ت کے طول کی قیمت معلوم کرو۔

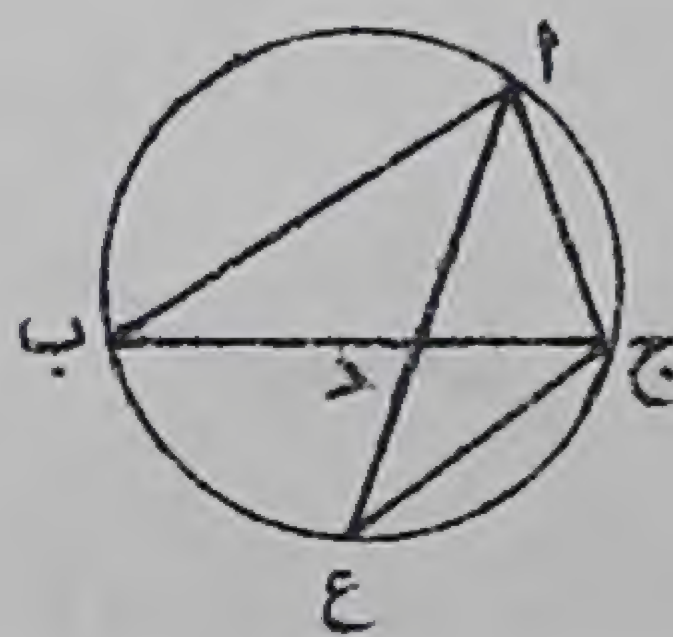
۳۔ دو دائرے کھینچے گئے ہیں، ان کے مرکز (۰، ۳) و (۰، ۲) ہیں اور

نیم قطر بالترتیب ۲۶ اور ۲۵ ہیں۔ ان کے مشترک نقاط کے محدود معلوم کرو اور ان کے وتر مشترک کا طول دریافت کرو۔

نقطہ (۱۳، ۳، ۳) سے جو ہر دائرہ کے مماس کھینچ سکتے ہیں ان کے طول معلوم کرو۔ اپنے نتائج کی پیمائش سے تصدیق کرو۔

مسئلہ اثباتی ۷۷

مثلث کے داسی زاویہ کو ایک خط مستقیم سے تنصیف کیا گیا ہے جو قاعدہ کو کاٹتا ہے، ثابت کرو کہ اضلاع کی سطح قاعدہ کے حصوں کی سطح اور منصف کے مربع کے مجموعہ کے مساوی ہے۔



فرض کرو کہ AB ج مثلث ہے اور زاویہ B A ج کی تنصیف خط AD سے کی گئی ہے۔
یہ ثابت کرنا ہے کہ

AB، A ج کی سطح = B D، D ج کی سطح + AD پر کا مربع
مثلث AB ج کے گرد دائرہ کھینچو اور AD کو بڑھاؤ کہ یہ محیط سے E پر ملے، ج C کو ملاؤ۔

ثبوت۔ مثلثوں B AD اور A ج میں D B AD = D E A ج اور D B AD = D E A ج ایک ہی قطعہ میں ہیں،

باقی D B AD = D E A ج
پس مثلث B AD، E A ج متساوی الزوایا ہیں

77 June

اس لیے $\frac{ا ب}{ع ا} = \frac{د ا}{ج ا}$

اس لیے $اب \times ج = ا \times اد$

$$d_1(d_2 + d_1) =$$

$$E \times D + 5P =$$

۷۵

لیکن $d \times d = b \times b$

اس لیے سطح اب، اج = سطح ب د، وج + اد پر کا مربع

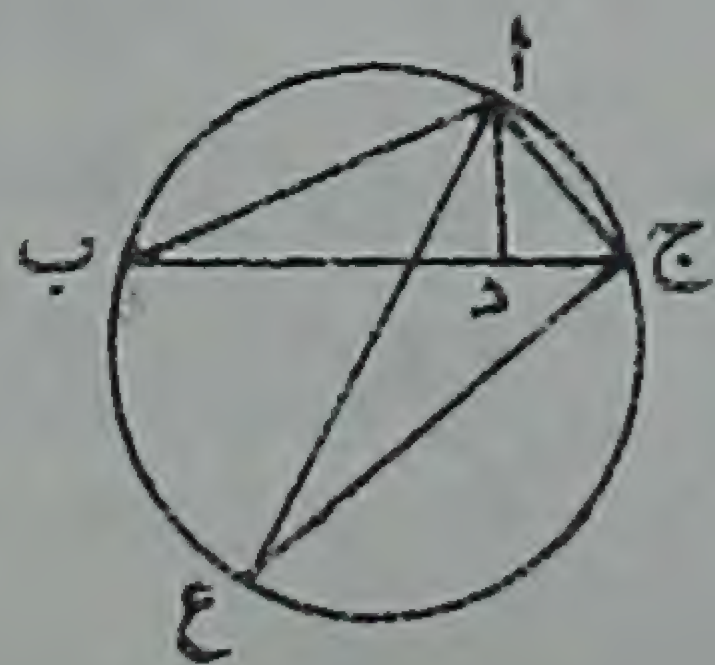
مشق

اگر اسی زاویہ ب ا ج کی خارجاً ا د سے تقصیف کی جائے تو ثابت کرو کہ

$$اب \times اج = ب د \times ج - اد$$

664

مثلاً کے راسی زاویہ سے قاعدہ میں عمود نکالا گیا ہے، ثابت کرو کہ اضلاع کا حاصل ضرب اس عمود اور مثلث کے حائض دائرہ کے قطر کی سطح کے مساوی ہے۔



فرض کرو کہ مثلث ABC میں A سے قاعدہ BC پر عمود اُتے گا
 گیا ہے اور $\angle C$ حائل دائرہ کا قطر ہے۔
 یہ ثابت کرنا ہے کہ

$$ب ا \times ج ا = ا د \times ا ع$$

ع ج کو ملاؤ

ثبوت - مثلثوں ب ا د اور ع ا ج میں

زاویہ قائمہ ب د ا = زاویہ قائمہ ع ج ا (جو نیم دائرہ ع ج ا میں واقع ہے)

د ا ب د = د ا ع ج ایک ہی قطعہ میں

باقی د ب ا د = د ا ع ج

یعنی مثلث ب ا د، ع ا ج متساوی الزوایا ہیں -

مسئلہ ۶۲

$$\frac{ا ب}{ا ع} = \frac{ا د}{ا ج}$$

اس لیے ا ب \times ا ج = ا د \times ا ع

یا سطح ا ب، ا ج = سطح ا د، ا ع

نوٹ - اگر مثلث ا ب ج کے اضلاع ا، ب، ج ہوں، اس کے

حائط دائرہ کا نیم قطر ہو اور ع عمود ا د ہو تو

$$ا ع \times ا د = ا ب \times ا ج$$

$$۲ \times ع = ب ج$$

$$\frac{ب ج}{ع ۲} = \text{یعنی } ۱$$

$$\frac{ا ب ج}{\Delta ۴} = \frac{ا ب ج}{ا د ع ۲} =$$

مسئلہ ۷، [بطلیموس کا مسئلہ]

ایک ذوا ربعة (اضلاع چار ضلعی) دائرہ کے اندر بن سکتی ہے،

اس کے قطروں کی سطح اس کے مقابل کے اضلاع کی سطحوں کے مجموعہ

کے مساوی ہوتی ہے -



ا ب ج د واربعة الاضلاع ہے جس کو دائرہ کے اندر بنایا گیا ہے، فرض کرو کہ
ا ج اور ب د اس کے قطر ہیں۔

یہ ثابت کرنا ہے کہ

ا ج، ب د کی سطح = ا ب، ج د کی سطح + ب ج، د ا کی سطح
زاویہ د ا ج کو زاویہ ب ا ج کے مساوی بناؤ، ہر ایک میں د ا ج زیادہ کرو۔

$$\text{تب } د ا ج = د ا ب$$

ثبوت - مثلثوں ع ا ب، د ا ج میں

$$د ا ب = د ا ج$$

اور د ا ب ع = د ا ج د ایک ہی قطعہ میں

مسئلہ ۱۶

اس لیے مثلث ع ا ب اور د ا ج متساوی الزوایا ہیں

مسئلہ ۶۲

$$\text{اس لیے } \frac{ب ا}{ج ا} = \frac{ب ع}{ج د}$$

اس لیے ب ا × ج د = ا ج × ب ع (۱)

نیز مثلثوں د ا ج اور ج ا ب میں

$$د ا ج = د ا ب$$

اور د ا د ع = د ا ج ب ایک ہی قطعہ میں

اس لیے مثلث د ا ج، ج ا ب متساوی الزوایا ہیں

$$\text{اس لیے } \frac{د ا}{ج ا} = \frac{د ع}{ج ب}$$

یعنی $ب ج \times د ا = ا ج \times د ع$ (۲)

(۱) اور (۲) کے ہر جانب کی سطحوں کو جمع کرنے سے

$$ا ب \times ج د + ب ج \times د ا = ا ج \times ب ع + ا ج \times د ع$$

$$= ا ج (ب ع + د ع)$$

$$= ا ج \times ب د$$

مشقیں

۱۔ $ا ب ج$ ایک مثلث متساوی الساقین ہے، اس کے قاعدہ پر یا قاعدہ
مخروجہ پر کوئی نقطہ لا لیا گیا ہے، ثابت کرو کہ مثلثوں $ا ب لا$ ، $ا ج لا$ کے عاٹ
دائرے مساوی ہیں۔

۲۔ متساوی الساقین مثلث $ا ب ج$ کے قاعدہ کے سروں $ب$ اور $ج$ سے
خطوط مستقیم کھینچے گئے ہیں جو $ا ب$ اور $ا ج$ پر بالترتیب عمود وار ہیں، یہ خط ایک
دوسرے کو $د$ پر قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ

$$ب ج \times د ا = د ا \times ب د$$

۳۔ ایک ذواربعة الاضلاع (چار ضلعی) دائرہ کے اندر بن سکتی ہے، اس کے
قطر ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں، ثابت کرو کہ مقابل کے اضلاع کے حاصل ضرب
کا مجموعہ شکل کے رقبہ کے دوچند کے مساوی ہے۔

۴۔ ذواربعة الاضلاع $ا ب ج د$ دائرہ کے اندر بن سکتی ہے، اور اس کا قطر
 $ب د$ ، $ا ج$ کی تنصیف کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$ا د \times ا ب = د ج \times ج ب$$

۵۔ مثلث $ا ب ج$ کے راس $ا$ کو قاعدہ $ب ج$ کے کسی نقطہ کے ساتھ

لایا گیا ہے، ثابت کرو کہ اس طرح سے جو دو مثلث بنتے ہیں ان کے عاٹ دائروں
کے نیم قطروں کی نسبت $ا ب : ا ج$ ہے۔

۶۔ مثلث بناؤ جس کا قاعدہ، راسی زاویہ اور اضلاع کی سطح تینوں معلوم ہیں۔

۷۔ ایک ہی دائرہ کے اندر مساوی رقبوں والے دو مثلث بنائے گئے ہیں، ثابت کرو کہ پہلے مثلث کے کسی دو ضلعوں کی سطح کو دوسرے مثلث کے کسی دو ضلعوں کی سطح کے ساتھ وہی نسبت ہے جو دوسرے کے قاعدہ کو پہلے قاعدہ کے ساتھ ہے۔

۸۔ مساوی ضلعوں والا مثلث Δ ب ج ہے، اس کے حاطہ دائرہ کی قوس ب ج پر کوئی نقطہ ن لیا گیا ہے، ن کو Δ ب ج کے ساتھ ملایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$ن ب + ن ج = ن ا$$

۹۔ ذواربۃ الاضلاع Δ ب ج د دائرہ کے اندر بنائی گئی ہے، ب د زاویہ Δ ب ج کی تنصیف کرتا ہے، اگر نقاط Δ اور ج محیط پر ثابت رہیں اور ب کے مقام کو بدلا جائے تو ثابت کرو کہ

Δ ب + Δ ج : Δ ب د مستقل نسبت ہے۔

$$۱۰۔ ضابطہ ص = \frac{\Delta ب ج}{۵۴} \text{ سے (ملاحظہ ہو نوٹ صفحہ ۸۱) ص کی}$$

قیمت معلوم کرو جب کہ مثلث کے اضلاع حسب ذیل ہوں :

$$(۱) ۲۱، ۲۰، ۱۳ \quad (۲) ۳، ۲۵، ۱۱ \text{ فٹ}$$

مثلثوں کو مناسب پیمانہ پر بناؤ اور پیمائش سے اپنے نتیجہ کی تصدیق کرو۔

متفرق نظری مشقیں

حصص آٹا ۵ پر

۱۔ دو دائرے جن کے مرکز بالترتیب ج اور د ہیں ایک دوسرے کو Δ اور ب پر قطع کرتے ہیں، نقطہ Δ میں سے ایک خط مستقیم کھینچا گیا ہے جو دائروں کے محیطوں کو ن اور ق پر کاٹتا ہے، ثابت کرو کہ

$$(۱) \Delta ن ب ق = \Delta ج ا د$$

$$(۲) \Delta ب ن ج = \Delta ب ق د$$

۲-۱ ب ایک دائرہ کا معلومہ قطر ہے اور ج د کوئی وتر ہے جو ا ب کے متوازی ہے۔ ا ب پر کے کسی نقطہ لا کو ج د کے سروں کے ساتھ ملایا گیا ہے، ثابت کرو کہ

$$\text{لا ج}^۲ + \text{لا د}^۲ = \text{لا ا}^۲ + \text{لا ب}^۲$$

۳- ایک ہم محیط ذوا ربعة الاضلاع (چار ضلعی) کے مقابل کے ضلعوں کو اتنا خارج کیا گیا ہے کہ وہ ایک دوسرے کو قطع کریں۔ ثابت کرو کہ ایسا کرنے سے جو دو زاویے بنتے ہیں اُن کے منصف ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں۔

۴- ایک مثلث کا راسی زاویہ، اس زاویہ کا ایک حاطط ضلع اور اُس عمود کا طول جو اس سے قاعدہ پر نکالا جائے تینوں معلوم ہیں۔ مثلث بناؤ۔

۵- ایک خط مستقیم پر ایک ہی ترتیب میں تین نقطے ا، ب، ج ہیں، خط پر ایک ایسا نقطہ ن معلوم کرو کہ ن ب فاصلوں ن ا اور ن ج کے درمیان وسط تناسب ہو۔

۶- مثلث ا ب ج کے قاعدہ میں کوئی نقطہ د ہے، د میں سے خطوط د ع، د ف اضلاع ا ب، ا ج کے بالترتیب متوازی کھینچے گئے ہیں اور ضلعوں کو یہ ع اور ف پر کاٹتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث ا ع ف وسط تناسب ہے مثلثات ف ب د، ع د ج کے درمیان۔

۷- ایک دائرہ میں ن ق ایک ثابت وتر ہے اور ن، ق میں سے دو متوازی وتر ن لا، ق ما کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ لا ما ایک ثابت ہم مرکز دائرہ کو مس کرتا ہے۔

۸- دو دائرے ایک دوسرے کو ج پر مس کرتے ہیں۔ ج میں سے دو علی القیوم خط کھینچے گئے ہیں جو دائروں سے بالترتیب ن، ن پر اور ق، ق پر ملتے ہیں۔ اگر مرکزوں کے ملانے والا خط محیطوں کو نقاط ا، ا پر کاٹے تو ثابت کرو کہ

$$\text{ن ن}^۲ + \text{ق ق}^۲ = \text{ا ا}^۲$$

۹-۱ ع مثلث ا ب ج کے راسی زاویہ کی تنصیف کرتا ہے، اور

قاعدہ سے $ع$ پر ملتا ہے۔ اگر مثلثوں $ابع$ ، $اجع$ کے بیرونی دائروں کے قطر $ق$ ، $ق$ ہوں تو $ق : ق = ب : ع = ج : ع$ ۔
 ۱۰۔ $اب$ ، $اج$ ایک دائرہ کے وتر ہیں، $ا$ پر کے مماس کے متوازی ایک خط کھینچا گیا ہے جو $اب$ اور $اج$ کو بالترتیب $د$ اور $ع$ پر کاٹتا ہے۔
 ثابت کرو کہ

$$اب * اد = اج * اع$$

۱۱۔ ایک خط دو معلومہ نقطوں پر تقسیم کیا گیا ہے، اس پر ایک تیسرا نقطہ دریافت کرو جس کے فاصلے خط کے سروں سے متناسب ہوں ان فاصلوں کے جو تیسرے نقطہ اور معلومہ نقطوں کے درمیان ہیں۔
 ۱۲۔ مثلث کے راسوں سے مقابل کے اضلاع پر جو عمود کھینچ سکتے ہیں ان کے پائے معلوم ہیں۔ مثلث کو بناؤ۔

۱۳۔ ایک ذواربعتہ الاضلاع (چار ضلعی) کے اندر اور باہر دائرے کھینچ سکتے ہیں، ثابت کرو کہ اندرونی دائرہ کے متقابل نقاط مماس کے ملانے والے خط ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر کاٹتے ہیں۔

۱۴۔ دو خط ایک دوسرے پر عمود وار ہیں، ان کے درمیان دو مساوی دائرے اس طرح حرکت کرتے ہیں کہ ہر دائرہ اثنائے حرکت میں ایک ہی خط کو مس کرتا ہے اور دونوں دائرے باہم مس کرتے ہیں۔ نقطہ مماس کا طریق (locus) معلوم کرو۔

۱۵۔ ایک دیے ہوئے دائرہ کا قطر $اب$ ہے، $اب$ کے ایک ہی جانب دو وتر $اج$ ، $ب د$ ہیں جو ایک دوسرے کو $ع$ پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ جو دائرہ $د$ ، $ع$ ، $ج$ میں سے گذرتا ہے وہ معلومہ دائرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتا ہے۔
 [ملاحظہ ہو تعریف صفحہ ۱۲۱]۔

۱۶۔ اگر ایک ذواربعتہ الاضلاع کے ہر عین اضلاع کو مس کرنے والے چار دائرے کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ان کے مرکز ایک دائرہ کے محیط پر واقع ہوں گے۔
 ۱۷۔ خط مستقیم $اب$ کو $ج$ اور $د$ پر اس طرح تقسیم کیا گیا ہے کہ

۱۷۔ ا ب : ا ج = ا ج : ا د

۱ میں سے کسی سمت میں ایک خط ا ع کھینچا گیا ہے اور ا ج = ا ج ، ثابت کرو کہ
ب ج اور ج د کے سامنے ع پر مساوی زاویے بنتے ہیں۔
۱۸۔ مثلث کا راسی زاویہ ، اس کے حائط ضلعوں کی باہمی نسبت ، اور اس کے
حائط یا بیرونی دائرہ کا قطر تینوں معلوم ہیں ، مثلث کو بناؤ۔

۱۹۔ و ایک ثابت نقطہ ہے ، ایک خط و ن ایک ثابت خط سے ن پر ملتا
ہے ، اگر و ن پر ایک نقطہ ق ایسا لیا جائے کہ نسبت وق : و ن مستقل ہو تو ق کا
طریق معلوم کرو۔

۲۰۔ و ایک ثابت نقطہ ہے ، ایک خط و ن کھینچا گیا ہے جو ایک ثابت دائرہ
سے ن پر ملتا ہے۔ اگر و ن پر ایک نقطہ ق ایسا لیا جائے کہ نسبت وق : و ن
مستقل ہو تو ق کا طریق معلوم کرو۔

۲۱۔ دو مساوی دائرے باہم ا اور ب پر قطع کرتے ہیں ، ان میں سے
ایک کے محیط پر کوئی نقطہ ج ہے جس سے ا ب پر عمود کھینچا گیا ہے جو دوسرے
دائرہ سے و اور و پر ملتا ہے ، ثابت کرو کہ و اور و میں سے کوئی ایک نقطہ مثلث
ا ب ج کا عمودی مرکز ہے۔ ان دو صورتوں میں تمیز کرو۔

۲۲۔ تین مساوی دائرے ایک نقطہ ا میں سے گزرتے ہیں اور ان کے باقی
نقاط تقاطع ب ، ج ، د ہیں ، ثابت کرو کہ ان چار نقطوں میں سے کسی تین کو ملانے
سے جو مثلث بنتا ہے اس کا مرکز عمودی چوتھا نقطہ ہے۔

۲۳۔ دائرہ کے باہر ایک نقطہ ہے ، اس نقطہ سے دائرہ کے مقعر محیط تک
خط مستقیم کھینچو جس کی تنصیف محذب محیط پر ہو۔ کب یہ سوال ناممکن ہوگا۔
۲۴۔ مثلث کا قاعدہ ، ارتفاع ، اور اس کے حائط دائرہ کا نیم قطر تینوں
معلوم ہیں ، مثلث کو بناؤ۔

۲۵۔ ایک مثلث کا قاعدہ اور باقی اضلاع کا مجموعہ دونوں معلوم ہیں ، قاعدہ کے

ایک سرے سے اس پر کے خارجی زاویہ کے منصف پر جو عمود کھینچ سکتا ہے اس کے پایہ کا طریق دریافت کرو۔

۲۶۔ مثلث کو بناؤ، اس کے خارجی دائروں کے تینوں مرکز معلوم ہیں، یا ایک اس کے اندرونی دائرہ کا مرکز (در مرکز) اور دو خارجی مرکز معلوم ہیں۔

۲۷۔ مثلث اب ج کا عمودی مرکز ہے، ثابت کرو کہ

$$ا + ب + ج = ب + و + ج = ا + ج + و = ا + ب + و = ق$$

جہاں ق بیرونی دائرہ کا قطر ہے۔

۲۸۔ ایک دائرہ کی قوس کا وسطی نقطہ ج ہے اور قوس کا وتر ا ب ہے،

مزدوج قوس پر کوئی نقطہ د ہے، ثابت کرو کہ

$$ا + د + ب : د : ج = ا ب : ا ج$$

۲۹۔ مثلث ا ب ج کے ضلع ا ج میں نقطہ د ہے، اور ا ب میں نقطہ ع

ہے۔ ب د اور ج ع ایک دوسرے کو ایسے حصوں میں تقسیم کرتے ہیں جن کی باہمی نسبت ۳ : ۱ ہے۔ ثابت کرو کہ د اور ع بالترتیب ج ا، ب ا کو نسبت ۳ : ۱ سے تقسیم کرتے ہیں۔

۳۰۔ اگر دو ثابت نقطوں سے ایک ایسے خط مستقیم پر کے عمودوں کی نسبت

جو ان کے درمیان سے گزرتا ہے مستقل ہو تو ثابت کرو کہ خط مستقیم ایک تیسرے ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے۔

۳۱۔ مثلث ا ب ج کے راس ا سے ایک خط کھینچو جو ب ج مخروط سے

ایسے نقطہ د پر ملے کہ ا د قاعدہ کے حصوں کے درمیان وسط تناسب ہو۔

۳۲۔ دو دائرے اندر کی طرف سے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں،

بڑے دائرہ کا ایک وتر ا ب چھوٹے دائرہ کو ج پر مس کرتا ہے اور و ا، و ب

چھوٹے دائرہ کو بالترتیب ن اور ق پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$و ن : و ق = ا ج : ج ب$$

۳۳۔ ا ب دائرہ کا وتر ہے، محیط پر کوئی نقطہ ج ہے، ا ج اور ب ج

اُس قطر کو جو AB پر عمود وار ہے بالترتیب d اور e پر کاٹتے ہیں، اگر دائرہ کا مرکز O ہو تو ثابت کرو کہ سطح ODE و ODE نیم قطر کے مربع کے مساوی ہے۔

۳۴ - دائرہ کے قطر AB پر ایک نقطہ M ہے، دائرہ کا مماس MA کھینچا گیا ہے اور D سے قطر پر عمود DA نکالا گیا ہے، ثابت کرو کہ LA ، MA قطر AB کو داخلی اور خارجی ایک ہی نسبت سے تقسیم کرتے ہیں۔

۳۵ - دائرہ کے محیط پر ایک نقطہ ایسا معلوم کرو کہ اس سے دو اور نقاط معلومہ تک جو خط کھینچے جائیں اُن کے طولوں میں ایک دی ہوئی نسبت ہو۔

۳۶ - مثلث کا قاعدہ اور راسی زاویہ کے منصف کا مقام دونوں معلوم ہیں۔ مثلث کو بناؤ۔

۳۷ - دو دائرے ایک دوسرے کو خارجی نقطہ E پر مس کرتے ہیں، پہلے دائرہ کا وتر AB خارج کیا گیا ہے اور یہ دوسرے دائرہ کو C پر مس کرتا ہے، اسی طرح دوسرے دائرہ کا وتر AB مخرج پہلے دائرہ کو C پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$AB \times AC = AE \times AF$$

۳۸ - خارجی نقطہ معلومہ سے ایک خط مستقیم کھینچو جو ایک دائرہ سے چوتھا حصہ

کاٹے۔

۳۹ - ثابت کرو کہ مثلث کے بیرونی دائرہ کے مرکز کو راسوں سے جو خط ملاتے ہیں وہ عمودی مثلث کے متناظر اضلاع پر عمود وار ہوتے ہیں۔

۴۰ - مثلث ABC کے بیرونی دائرہ پر کوئی نقطہ N ہے اور N سے اضلاع BC ، CA پر عمود D اور E کھینچے گئے ہیں۔ مثلث EDC کے بیرونی مرکز کا طریق معلوم کرو۔

۴۱ - مثلث ABC کے بیرونی دائرہ پر کوئی نقطہ N ہے۔ ثابت کرو کہ N کے مماسن خط اور B ج کا درمیانی زاویہ اُس زاویہ کے مساوی ہے جو A اور C میں سے گزرنے والے بیرونی دائرہ کے قطر کے درمیان بنتا ہے۔

۴۲ - مثلث کا قاعدہ، راسی زاویہ، قاعدہ پر کے زاویوں کا فرق

تینوں معلوم ہیں - مثلث بناؤ -

۴۳ - خطوط مستقیم کے دو جوڑے ہیں، ان کے باہم قطع کرنے سے جو چار مثلث بنتے ہیں ان کے بیرونی یا حائل دائرے ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں -

۴۴ - خطوط مستقیم کے دو جوڑوں کے تقاطع سے جو چار مثلث بنتے ہیں ان کے عمودی مرکز ہم خط ہوتے ہیں -

۴۵ - ایک ہی دائرہ کے اندر ایک ہی تعداد اضلاع کے جو کثیرالاضلاع بن سکتے ہیں ان میں سے زیادہ سے زیادہ رقبہ اور محیط والا منتظم کثیرالاضلاع ہے -

۴۶ - ایک خط مستقیم AB پر دو نقطے C اور D لیے گئے ہیں اور خط AN کو اس کے ثابت سرے A کے گرد گھمایا گیا ہے - جس مستوی میں AN گھومتا ہے اس میں ایک ثابت نقطہ J ہے، C اور D کو ملا کر متوازی الاضلاع AB کی تکمیل کی گئی ہے، ثابت کرو کہ D کا طریق دائرہ ہے -

۴۷ - مثلث متساوی الاضلاع بناؤ جو ایک دیے ہوئے مثلث متساوی الساقین کے مساوی ہو -

۴۸ - مثلث کا راسی زاویہ بلحاظ مقام اور مقدار دونوں کے معلوم ہے، نیز اس کے احاطہ کرنے والے ضلعوں کا مجموعہ بھی معلوم ہے - بیرونی دائرہ کے مرکز کا طریق معلوم کرو -

۴۹ - کوئی مثلث ABC ہے، اس کے ضلعوں پر باہر کی طرف متساوی الاضلاع مثلث بنائے گئے ہیں - اگر ان مثلثوں کے اندرونی دائروں کے مرکز (در مرکز) L ، M ، N ہوں تو ثابت کرو کہ L ، M ، N متساوی الاضلاع ہے -

۵۰ - دائرہ میں ایک مثلث بناؤ جس کے دو ضلع دو معلومہ نقطوں میں سے

گذریں اور تیسرا ضلع ایک معلومہ خط کے متوازی ہو -

۵۱ - دائرہ میں ایک مثلث بناؤ جس کے تینوں ضلع تین نقاط معلومہ میں سے

گذریں -

۵۲۔ ایک خطِ مستقیم پر چار نقطے ۱، ب، لا، ما ہیں، اس پر و ایک ایسا نقطہ ہے کہ سطح و ۱، و ما مساوی ہے سطح و ب، و لا کے، اگر و کو مرکز مان کر ایسے نیم قطر پر دائرہ کھینچا جائے جو و ۱ اور و ما کے درمیان وسط تناسب ہو تو ثابت کرو کہ اس دائرہ کے ہر نقطہ پر ۱ ب اور لا ما کے سامنے مساوی زاویے بنیں گے۔

۵۳۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو متقاطع خطوں سے اس کے فاصلے ایک معلوم نسبت رکھتے ہیں، نقطہ کا طریق دریافت کرو۔

۵۴۔ مثلث کے حائط، داخلی، خارجی دائروں کے مرکز بالترتیب ط، ع، ع، ہیں، اور متناظر دائروں کے نیم قطر س، ر، م ہیں۔ اگر نو نقطہ دائرہ کا مرکز ن ہو تو ثابت کرو کہ

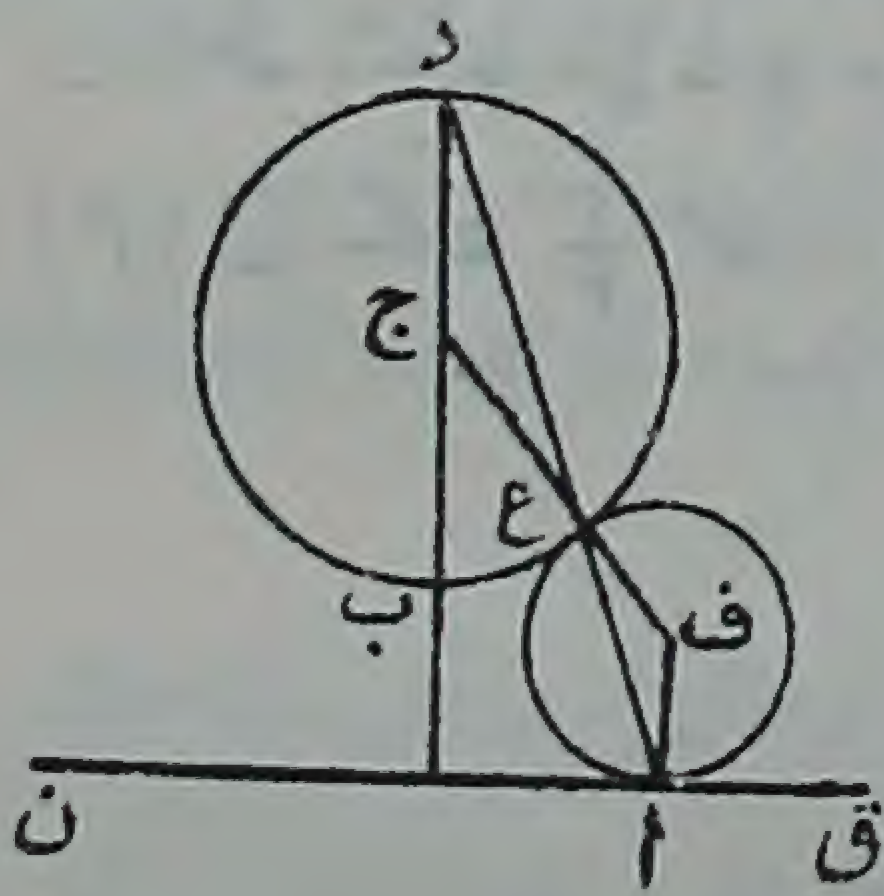
$$(۱) ط - ع = س - ر \quad (۲) ط - ع = س + ر$$

$$(۳) ن - ع = \frac{۱}{۲} س - ر \quad (۴) ن - ع = \frac{۱}{۲} س + ر$$

متفرق مسئلے اور مشقیں

۱۔ دائرے کھینچنے کے چند عمل

مثال ۱۔ ایسا دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے دائرہ (ج) کو مس کرے، نیز ایک دیے ہوئے خطِ مستقیم ن ق کو ایک نقطہ معلومہ ا پر مس کرے۔



عمل — ا پر عمود ا ف قائم کرو۔ مطلوبہ دائرہ کا مرکز ا ف پر کہیں واقع ہوگا۔

دیے ہوئے دائرہ کے مرکز ج میں سے وہ قطرب د کھینچو جو ن ق پر عمود وار ہو۔

ا کو اس قطر کے ایک سرے د کے ساتھ ملاؤ اور فرض کرو کہ خط ا د دائرہ معلومہ کے محیط کو ع پر کاٹتا ہے۔

ج ع کو ملاؤ اور اس کو اتنا خارج کرو کہ یہ ا ف سے ف پر ملے۔

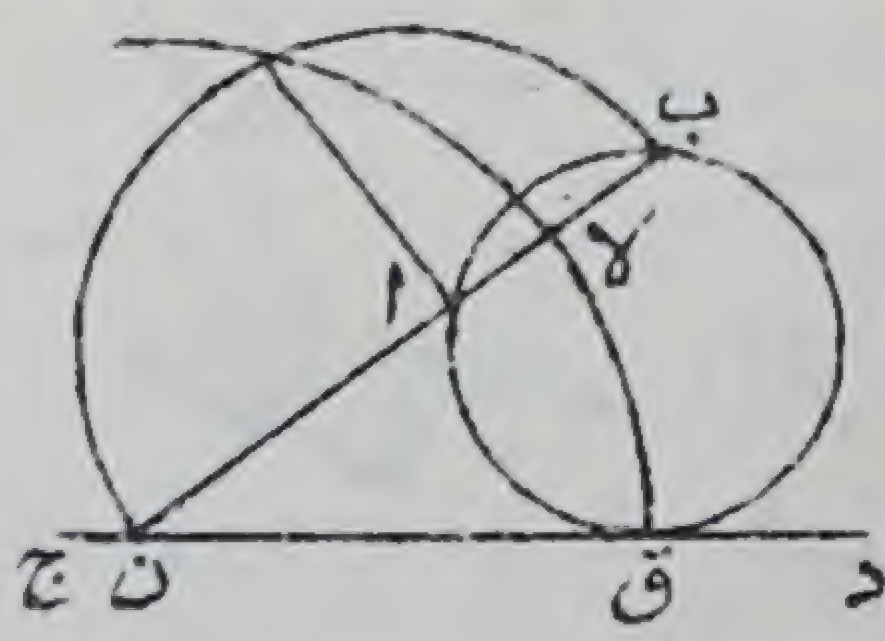
تب مطلوبہ دائرہ کا ف مرکز ہے اور ف ا نیم قطر۔

[ثبوت بہم پہنچاؤ۔ ثابت کرو کہ ا ب کو ملانے اور اسے محیط تک

خارج کرنے سے مسئلہ کا دوسرا حل حاصل ہو سکتا ہے۔]

مثال ۲۔ دائرہ کھینچو جو دو نقاط معلومہ ا اور ب میں

سے گزرے اور خطِ مستقیم ج د کو مس کرے۔



عمل - ب ا کو ملاؤ اور خارج کرو
کہ یہ ج د سے ن پر ملے۔

ن ا، ن ب کے درمیان ن لا

وسط تناسب معلوم کرو [مسئلہ عملی ۳۸ فوٹ]

ن د (یا ن ج) سے ن ق مساوی ن لا کے کاٹو۔

تب ا، ب اور ق میں سے گزرنے والا دائرہ ج د کو ق پر

[مسئلہ عملی ۲۵]

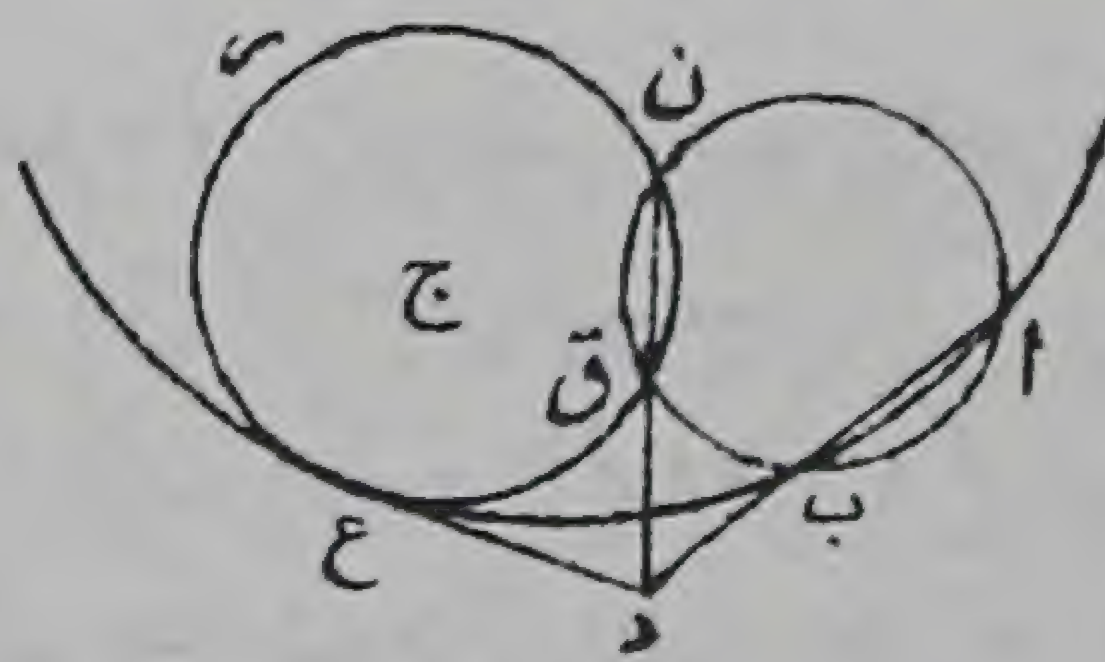
مس کریگا۔

[ثبوت بہم پہنچاؤ اور دکھاؤ کہ مسئلہ کے بالعموم دو حل ہونگے۔ عمل کی مناسب

ترمیم کرو جب کہ ا، ب، ج د کے متوازی ہو۔]

مثال ۳ - دائرہ کھینچو جو دو نقاط معلومہ ا، ب سے گزرتے

۱ اور ایک دائرہ معلومہ (ج) کو مس کرے۔



عمل - ۱، ب میں سے کوئی دائرہ کھینچو جو دیے ہوئے دائرہ کو ن اور ق

پر کاٹے۔

ا، ب اور ن ق کو ملاؤ اور انہیں اتنا خارج کرو کہ یہ د پر ملیں۔

د سے معلومہ دائرہ کا تماس د ع کھینچو۔

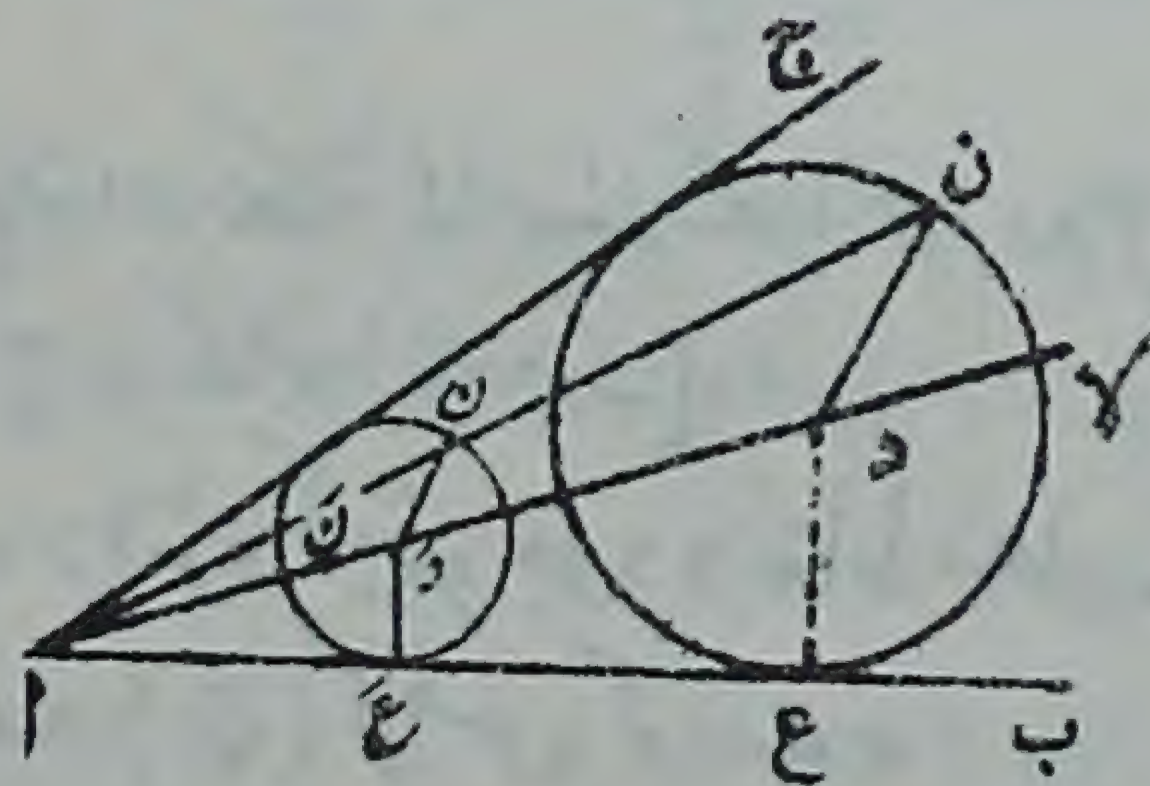
تب دائرہ جوا، ب، ع میں سے گزریگا وہ معلومہ دائرہ کو ع پر مس کریگا۔

[مسائل ۵۸، ۵۹ سے ثبوت بہم پہنچاؤ اور دکھاؤ کہ اس مسئلہ کے بالعموم

دو حل ہیں۔]

عمل کی مناسب ترمیم کرو جب کہ خط AB کا عمودی منصف J میں سے گزرے۔

مثال ۳ - دائرہ کھینچو جو ایک نقطہ معلوم N میں سے گزرے اور دو سیدھے خطوط AB ، AC کو مس کرے۔
عمل - زاویہ BAC کا منصف AD کھینچو۔ سب دائرے جو AB اور AC کو مس کرتے ہیں ان کے مرکز A پر واقع ہوتے ہیں۔



A پر کوئی نقطہ D لو، اس سے AB پر عمود DE کھینچو۔ D کو مرکز مان کر دائرہ کھینچو جو AB اور AC کو مس کرے۔
 AN کو ملاؤ، فرض کرو کہ یہ دائرہ (D) کو N پر کاٹتا ہے۔
 DN کو ملاؤ اور N میں سے DN کے متوازی کھینچو جو A کو دیر کاٹے۔

تب دائرہ مطلوبہ کا مرکز D ہے اور DN نیم قطر۔
 $[DE, AB]$ پر عمود نکالو۔ متشابہ مثلثات ADE, ADE, ADE اور ADN, ADN کے ذریعہ ثابت کرو کہ $DE = DN$ ۔
 DN کو ملانے اور پہلے کی طرح عمل کرنے سے دوسرا حل حاصل ہوگا۔
 عمل کی مناسب ترمیم کرو جب کہ خط BA ہم متوازی ہوں۔

مربع دار کاغذ کے متعلق مشقیں

۱۔ ایک دائرہ کا مرکز مبداء پر ہے اور اس کا نیم قطر ۱۰ ہے، وہ دائرہ کھینچو جو اس دائرہ کو مس کرے، نیز محور لا کو نقطہ (۰، ۲۰) پر مس کرے۔
دکھاؤ کہ ایسے دو دائرے کھینچ سکتے ہیں۔ اس دائرہ کا نیم قطر معلوم کرو جو مربع اول میں واقع ہے، نیز جہاں یہ دائرہ معلومہ کو مس کرتا ہے اس نقطہ کے محدد دریافت کرو۔

۲۔ ایک دائرہ معلوم ہے جس کا مرکز مبداء پر ہے اور نیم قطر ۱۰ ہے۔ ایسا دائرہ کھینچو جو اس دائرہ کو نقطہ (۸، ۶) پر مس کرے نیز محور ما کو مس کرے۔
دکھاؤ کہ ایسے دو دائرے کھینچ سکتے ہیں۔ ان کے نیم قطر اور محور ما کے ساتھ ان کے نقاط تماس معلوم کرو۔

۳۔ ۲ نیم قطر کے دائرہ کا ایک ربع کاٹو۔ اس کے اندر ایک دائرہ بناؤ۔ ثابت کرو کہ اندرونی دائرہ کا نیم قطر $r + r - r = r$ کی مثبت اصل کے مساوی ہے۔ حساب اور پیمائش سے نیم قطر نکالو۔

۴۔ ثابت کرو کہ ایسے دو دائرے کھینچ سکتے ہیں جو محدودوں کے محوروں کو مس کریں اور نقطہ (۲، ۲) میں سے گذریں، نیز ثابت کرو کہ ان کے نیم قطر مساوات درجہ دوم $r^2 + 2r - 2 = 0$ کی دو اصلیں ہیں۔

چھوٹا دائرہ کھینچو اور پیمائش سے اس کا نیم قطر معلوم کرو۔

۵۔ نقاط (۰، ۲) اور (۳، ۰) کو ملاؤ، نیز نقاط (۰، ۳) اور (۲، ۰) کو ملاؤ۔

دائرہ کھینچو جو ملانے والے دو خطوط کو مس کرے اور مبداء میں سے گذرے۔

۶۔ ایک مثلث متساوی الاضلاع کا ضلع ۳ ہے، اس کے اندر تین ایسے

مساوی دائرے بناؤ جن میں سے ہر ایک دائرہ مثلث کے دو ضلعوں اور باقی دو دائروں کو مس کرے۔

اگر کسی ایک دائرہ کا نصف قطر ہو تو ثابت کرو کہ

$$r = (1 + 0.05)^n$$

اس سے r کی قیمت انچ کے قریب ترین سوویں حصہ تک معلوم کرو۔

۷۔ ایک دائرہ کا نصف قطر ۲۵۰ ہے، اس کے اندر تین مساوی دائرے

کھینچو جن میں سے ہر ایک باقی دو دائروں کو اور دائرہ معلومہ کو مس کرے۔

اگر مساوی دائروں میں سے کسی ایک کا نصف قطر r ہو تو ثابت کرو کہ

$$r = (1 + 0.05)^n$$

اس لیے r کو انچ کے قریب ترین سوویں حصہ تک معلوم کرو۔

۲۔ اعظم اور اقل قیمتیں

فرض کرو کہ کوئی خط، زاویہ، یا شکل کسی دیے ہوئے شرائط کے ماتحت بدل

رہا ہے یعنی یہ اپنے مقام اور مقدار کو بتدریج بدلتا ہے، یہ دیکھنا مطلوب ہے کہ آیا اس

کی حالت کی مسلسل تبدیلیوں میں کوئی ایسے مقام ہیں جہاں یہ بڑھتے بڑھتے گھٹنا شروع

ہوتا ہے، یا گھٹتے گھٹتے بڑھنا شروع ہوتا ہے۔ اس مقام یا حالت میں جہاں یہ بڑھتے

بڑھتے گھٹنا شروع ہو اس کی مقدار کی جو قیمت ہوگی اس کو ہم قیمت اعظم کہیں گے اور

جہاں یہ گھٹتے گھٹتے بڑھنا شروع ہو اس کی مقدار کی قیمت کو ہم قیمت اقل کہیں گے۔

ہم یہاں صرف ان مسائل پر غور کریں گے جن میں تبدیلی صرف ایک مرتبہ ہوگی بڑھنے سے

گھٹنے کی حالت میں یا برعکس اس کے۔ پس موجودہ اغراض کے لیے قیمت اعظم حقیقت

میں بدلنے والی مقدار کی بڑی سے بڑی قیمت ہوگی اور قیمت اقل چھوٹی سے چھوٹی۔

ایسے سوالوں کے حل کرنے کے لیے دو اشارے دیے جاتے ہیں :-

(۱) ہم دیکھتے ہیں کہ بدلنے والی ہندسی مقداروں کی صورت میں اعظم اور

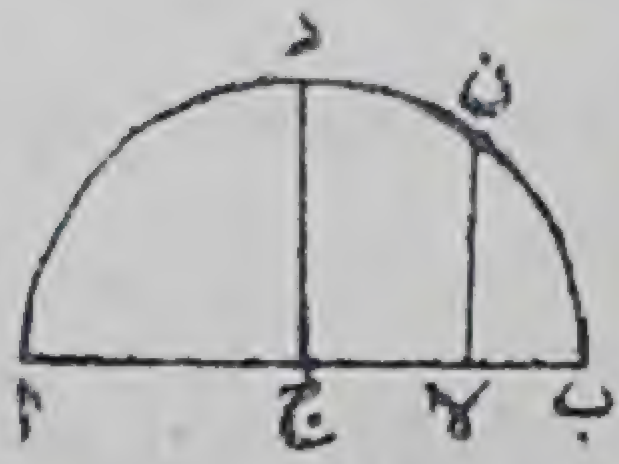
اقل قیمتیں صرف مورڈ کے نقطہ پر واقع ہونگی یعنی دونوں طرف سے مقدار یا تو اس

نقطہ کی طرف چڑھیں گی یا اس نقطہ سے اتریں گی۔ پس طبعی طور پر یہ خیال پیدا ہوتا ہے کہ

مقدار کی اعظم یا اقل قیمت اس مقام پر پیدا ہوگی جہاں یہ متشاکل صورت یا

حالت اختیار کرتی ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ بالعموم ایسا ہی ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ خط AB کو داخلہ اس طرح تقسیم کرو کہ اس کے دو حصوں کی سطح زیادہ سے زیادہ ہو۔



۱۔ AB کی تنصیف C پر کرو اور
۲۔ AB پر نصف دائرہ بناؤ۔

۳۔ AB پر کوئی نقطہ L اور K
۴۔ L سے عمود نکالو جو محیط سے N پر ملے،

تب $AN = LB = LA$ مسئلہ علی ۳۲

N سے بڑے سے بڑا ہے جب کہ یہ C پر منطبق ہو
اس لیے سطح $ANL = LAB$ اعظم ہوگی جب کہ L ، AB کا نقطہ تنصیف ہو۔
ملاحظہ ہو کہ صورت اعظم اس مقام پر وقوع پذیر ہوتی ہے جہاں N کا
متشاکل مقام C میں AB کی عمودی تنصیف کرتا ہے۔

(۲) نیز اگر ہندسی مقدار کی کسی مقررہ قیمت کے لیے اس کو کھینچنے یا بنانے کا
عمل دریافت ہو سکے تو یہ معلوم ہو سکیگا کہ کہاں اس کی قیمت اعظم یا اقل ہوتی ہے کیونکہ
اس کے بعد ہم اس امر کا معائنہ کریں گے کہ ہندسی عمل یا بناوٹ کے برقرار رہنے کے لیے
مقررہ قیمت کے لیے کیا حدود ہیں، اعلیٰ حد سے قیمت اعظم اور ادنیٰ سے قیمت اقل حاصل
ہوگی۔

یہ پہلے بتایا جا چکا ہے کہ اگر معطیات میں خاص شرائط ہونے کی وجہ سے کسی سوال
کے دو حل ہوں اور مختلف شرائط کے ماتحت کوئی حل ممکن نہ ہو تو کوئی درمیانی شرط
ایسی ضرور ہوگی جس کی رو سے دونوں حل مل کر ایک ہو جاتے ہوں۔ [ملاحظہ ہو
مسئلہ علی ۱۵ کے بعد طریقوں کا تقاطع، مشاہدہ]

ایسے حالات میں اس ایک حل سے مقدار زیر بحث کی قیمت اعظم یا اقل
حاصل ہوگی۔

مثال ۲۔ C د لا متناہی خط مستقیم ہے، معلوم کرو کہ اس
کے کس نقطہ پر ایک محدود خط AB کے سامنے بڑے سے بڑا زاویہ
بنے گا۔

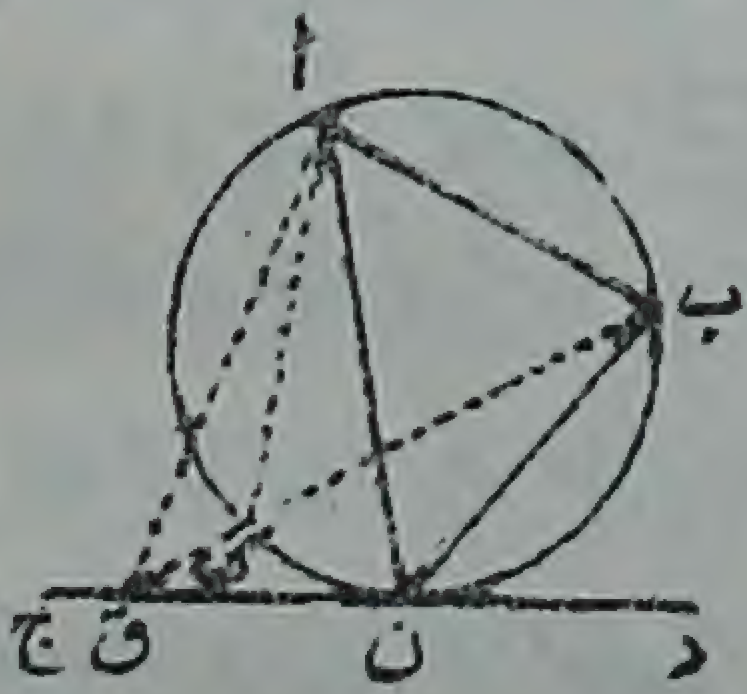
پہلے معلوم کرو کہ ج د کے کس نقطہ پر ا ب کے سامنے ایک معلومہ زاویہ بنیگا۔
یہ اس طرح معلوم ہو سکتا ہے۔

ا ب پر قطعہ دائرہ بناؤ جس میں کا زاویہ، معلومہ زاویہ کے مساوی ہو۔

[مسئلہ عملی ۲۴]

اگر قطعہ کی قوس خط ج د کو دو نقطوں پر کاٹے تو ج د پر دو نقطے ہونگے جن پر ا ب کے سامنے معلومہ زاویہ بنیگا، لیکن اگر قوس، ج د کو نہ کاٹے تو کوئی نقطہ نہیں ہوگا۔

اوپر کے اصولوں کی بنا پر ہمیں امید کرنی چاہیے کہ بڑے سے بڑا زاویہ اُس وقت حاصل ہوگا جب کہ قوس، ج د کو مس کرے۔ ہم دیکھینگے کہ یہ قیاس درست ہے۔



دائرہ کھینچو جو ا، ب میں سے
گذرے اور ج د کو مس کرے، فرض کرو
کہ نقطہ تماس ن ہے، مثال ۲ صفحہ ۹۲
تب د ا ن ب ا سے ہر
زاویہ سے بڑا ہوگا جو ا ب کے
سامنے اس کے اُس جانب جس جانب کہ ن ہے
ج د کے کسی نقطہ پر بنتا ہے۔

ثبوت۔ ج د پر کوئی اور نقطہ ق لوجو ا ب کے اسی جانب ہو جس جانب
کہ ن ہے۔ ا ق، ق ب کو ملاؤ۔

فرض کرو کہ ب ق دائرہ سے ک پر ملتا ہے۔ ا ک کو ملاؤ۔

تب د ا ک ب = د ا ن ب ایک ہی قطعہ میں۔

لیکن خارجہ زاویہ ا ک ب بڑا ہے مقابل کے اندرونی زاویہ ا ق ب سے

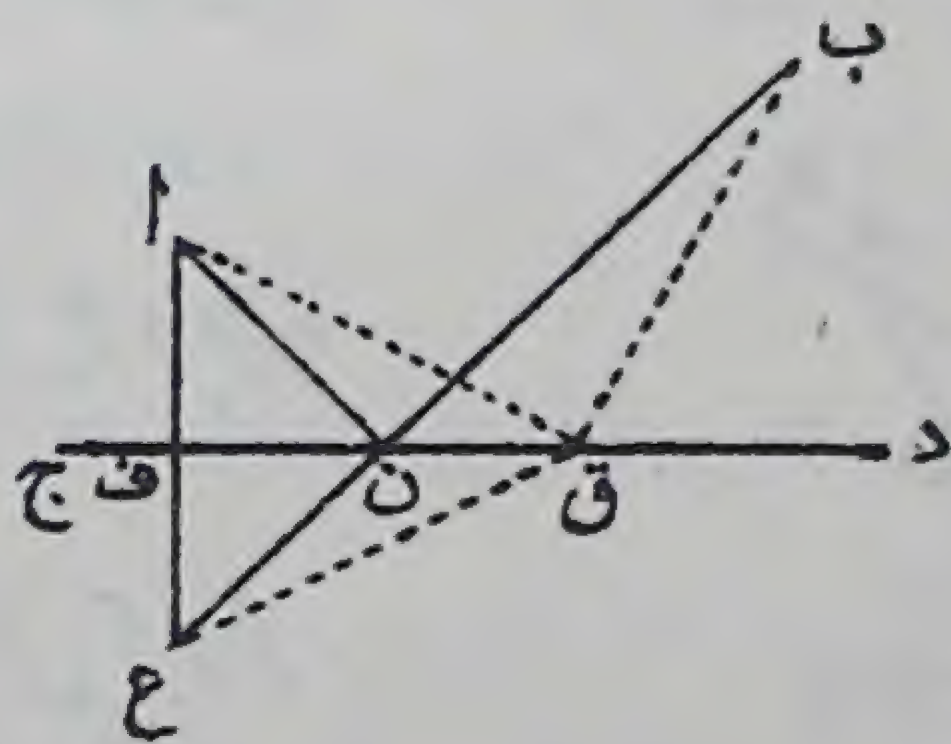
اس لیے د ا ن ب بڑا ہے د ا ق ب سے۔

اس لیے د ا ن ب سب ایسے زاویوں سے بڑا ہے۔

نوٹ۔ ایسے دو دائرے کھنچ سکتے ہیں جو ا، ب میں سے گذریں اور ج د

مس کریں۔ ان دائروں کے دو نقاط تماس ہونگے، ایک ا ب کے ایک جانب واقع ہوگا دوسرا دوسری جانب، پس ج د کے اُن سب نقاط میں سے جو ا ب کے ایک جانب واقع ہوتے ہیں بڑے سے بڑا زاویہ ا ب کے سامنے اُس طرف کے نقطہ تماس پر ہوگا، اسی طرح دوسری جانب کے سب نقاط میں سے زاویہ اعظم اُس طرف کے نقطہ تماس پر ہوگا۔

مثال ۳۔ ج د ایک لائحہ ود خط ہے اور اس کے ایک ہی جانب دو نقطہ ا، ب ہیں، ج د میں ایسا نقطہ معلوم کرو کہ ا اور ب سے اس کے فاصلوں کا مجموعہ کم سے کم ہو۔



۱ سے ج د پر عمود ا ف نکالو۔ ا ف کو ع تک اتنا خارج کرو کہ

$$اف = ف ع،$$

ع ب کو ملاؤ کہ یہ ج د کو ن پر کاٹے۔ ا ن کو ملاؤ،

تب ا ن + ن ب اقل ہوگا۔

ثبوت۔ ج د پر کوئی اور نقطہ ق ل۔ ا ق، ب ق، ع ق کو ملاؤ۔

اب مثلث ا ف ن، ع ف ن متطابق ہیں۔

اس لیے ا ن = ع ن، اسی طرح ا ق = ع ق

۵ ع ق ب میں ع ق + ق ب بڑا ہے ع ب سے،

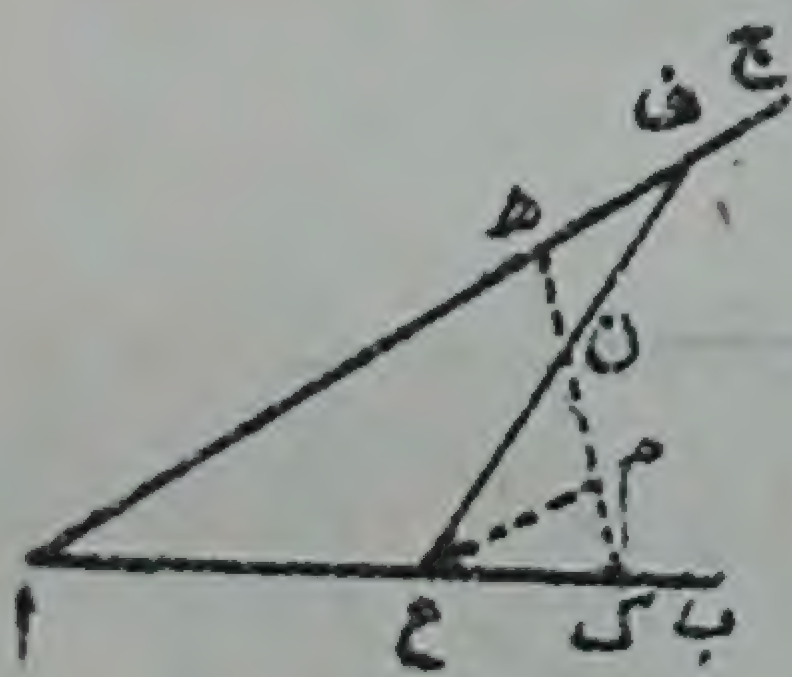
یعنی ا ق + ق ب بڑا ہے ا ن + ن ب سے

پس ا ن + ن ب اقل ہے۔

نوٹ - ہم دیکھتے ہیں کہ $\Delta \text{ان ف} = \Delta \text{ع ن ف}$ مسئلہ نظری ۲
 $\Delta \text{ب ن ق} =$ " " " ۳

پس $\text{ان} + \text{ن ب}$ کم سے کم ہوتا ہے جب کہ ان اور ن ب خط ج د کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں۔

مثال ۴ - دو متقاطع خط اب ، اج ہیں اور ایک نقطہ ن ان کے درمیان واقع ہے۔ ثابت کرو کہ ان سب خطوط میں سے جو ن میں سے گزرتے ہیں اور اب ، اج پر منتهی ہوتے ہیں وہ خط جس کی تنصیف ن پر ہوتی ہے کم سے کم رقبہ والا مثلث قطع کرتا ہے۔ فرض کرو کہ ع ف خط ہے جس کی تنصیف ن پر ہوتی ہے۔



تب $\Delta \text{ف ا ع}$ رقبہ میں کم سے کم ہوگا۔

ثبوت - فرض کرو کہ

ن میں سے گزرنے والا ہر ایک اور خط مستقیم ہے۔

ع میں سے ع م ، اج کے متوازی کیمنچو۔

ظاہر ہے کہ مثلث ھ ن ف اور ن ع انطباق پذیر ہیں۔

اس لیے یہ بلحاظ رقبہ باہم مساوی ہیں۔

اس لیے $\Delta \text{ھ ن ف}$ کم ہے $\Delta \text{ک ن ع}$ سے

ہر ایک میں شکل ا ھ ن ع زیادہ کرو، تب

$\Delta \text{ف ا ع}$ کم ہے $\Delta \text{ھ ا ک}$ سے

یعنی $\Delta \text{ف ا ع}$ اقل ہے۔

مسئلہ نظری ۱

اعظم اور اقل قیمتوں پر مشقیں

۱۔ مثلث کے داضلعوں کے طول معلوم ہیں، بتاؤ کہ بلحاظ ایک دوسرے کے وہ کس طرح رکھے جائیں کہ مثلث کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو۔

بڑے سے بڑے مثلث کا رقبہ معلوم کرو جس میں $1 = 168$ سنتی میٹر، $b = 25$ سنتی میٹر۔

۲۔ ثابت کرو کہ ان سب مثلثوں میں سے جن کا قاعدہ اور رقبہ دونوں دیے ہوئے ہیں، مثلث متساوی الساقین کم سے کم محیط والا ہے۔ [ملاحظہ ہو مشق ۳، صفحہ ۹۹]
ایسے مثلث کا کم سے کم محیط معلوم کرو جس کا قاعدہ 20 ہے اور رقبہ 12 مربع انچ۔

۳۔ بڑے سے بڑے رقبہ والا مثلث بناؤ جس کا قاعدہ 10 سنتی میٹر ہو اور راسی زاویہ 90° ۔ اس کا رقبہ دریافت کرو۔

۴۔ مبداء کو مرکز اور 5 دائرہ کو نصف قطر بن کر دائرہ کھینچو۔ نقاط $A(0, 4)$ ، $B(3, 0)$ کو ملاؤ، B میں ایسا نقطہ معلوم کرو جس سے اگر دائرہ کے مماس نکھینچے جائیں تو ان کے درمیان بڑے سے بڑا زاویہ بنے۔ زاویہ کو ناپو اور اپنے نتیجہ کی توجیہ کرو۔

۵۔ دو سیدھی پٹریاں ایک دوسرے کے اوپر علی القوائم کھڑی کی گئی ہیں اور ایک سیدھی سلاخ ان کے درمیان پھسلتی ہے، بتاؤ کہ جو مثلث پٹریوں اور سلاخ کے درمیان بنتا ہے وہ سلاخ کے کس مقام کے لیے رقبہ میں زیادہ سے زیادہ ہوگا۔
۶۔ ایک خط مستقیم کو دو ایسے حصوں میں تقسیم کرو کہ حصوں کے مربعوں کا مجموعہ

(۱) دیے ہوئے مربع کے مساوی ہو۔

(۲) کم سے کم ہو۔

۷۔ دو دائروں کے ایک نقطہ تقاطع میں سے خط کھینچو جو محیطوں پر جا کے

ختم ہو

(۱) اور طول میں ایک معلومہ خط کے مساوی ہو۔

(۲) طول میں زیادہ سے زیادہ ہو۔

۸۔ ایک دائرہ کھینچو جو محور لا اور ما کو نقاط ۱ اور ب پر مس کرے

جب کہ دونوں نقطے مبداء سے ۴ کے فاصلہ پر واقع ہیں۔

بڑی قوس ا ب پر وہ نقطہ معلوم کرو جس کے محدودوں کا مجموعہ زیادہ سے

زیادہ ہو۔

نیز چھوٹی قوس ا ب پر نقطہ معلوم کرو جس کے محدودوں کا مجموعہ کم سے

کم ہو۔

ہر صورت میں مجموعہ دریافت کرو اور پیمائش سے تصدیق کرو۔

۹۔ دو نقاط معلومہ سے خط کھینچے گئے ہیں جو ایک دیے ہوئے دائرہ کے

موجب حصہ پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے طولوں کا مجموعہ

کم سے کم ہوگا جب کہ یہ خط نقطہ تقاطع پر کے مماس کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں۔

۱۰۔ دکھاؤ کہ ان سب مثلثوں میں سے جن کے راسی زاویہ اور ارتفاع دونوں

ایک ہی ہوں مثلث متساوی الساقین کا رقبہ کم سے کم ہوتا ہے۔

جس مثلث میں راسی زاویہ = ۹۰° اور ارتفاع = ۶ سنتی میٹر، اُس کا کم سے کم

رقبہ کیا ہوگا؟ اس کا مجموعہ اضلاع معلوم کرو۔

۱۱۔ دائرہ کے دو متقاطع مماس دیے گئے ہیں، موجب قوس کا مماس کھینچو جو

باقی دو مماسوں کے ساتھ مل کر زیادہ سے زیادہ رقبہ والا مثلث بنائے۔

۱۲۔ ایک مثلث کا قاعدہ ۱۵۶ اور رقبہ ۱۵۲ مربع انچ ہونا چاہیے،

ترسیمی طریق سے (قریب ترین درجہ تک) اس کے راسی زاویہ کی قیمت اعظم معلوم کرو۔

۱۳۔ نقطے ۱ اور ب دونوں دائرہ کے اندر ہیں یا دونوں باہر، دائرہ

کے محیط پر ایک نقطہ معلوم کرو جس پر ا ب کے سامنے بڑے سے بڑا زاویہ بنے۔

[دیکھو مثال ۲ صفحہ ۹۴]

۱۴۔ محور لا پر دو نقطے ۱، ب مبداء سے ۵۸، ۵۸ کے

فاصلوں پر ہیں، محور ماپر نقطہ ن معلوم کرو کہ زاویہ \angle ب زیادہ سے زیادہ ہو۔
ون کا طول محسوب کرو اور زاویہ اعظم ناپو۔

۱۵۔ ایک ٹل کی تین کمانیں ہیں جن کے عرض بالترتیب ۴۹ فٹ، ۳۲ فٹ اور ۴۹ فٹ ہیں، بتاؤ کہ ٹل سے کتنے فاصلہ پر کسی ایک کنارہ پر وہ نقطہ ہے جہاں پر درمیانی کمان کے سامنے زاویہ اعظم بنتا ہے۔

۱۶۔ ایک دائرہ کا مرکز ج ہے اور اس کے باہر ایک نقطہ ن ہے،
ن سے ایک خط \angle ب کھینچو جو محیط کو ایسے نقاط \angle اور ب پر کاٹے کہ مثلث
 \angle ج ب کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو۔

اگر دائرہ کا نصف قطر ۹ سنتی میٹر ہو تو ایسے بڑے سے بڑے مثلث کا رقبہ دریافت کرو اور ثابت کرو کہ رقبہ ن کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔

۱۷۔ ایک دائرہ کا نیم قطر ۵ سنتی میٹر ہے، اس کے اندر جو بڑے سے بڑے رقبہ والا مستطیل بن سکتا ہے اس کا رقبہ معلوم کرو۔

۱۸۔ دائرہ کے باہر دو ثابت نقطے \angle اور ب ہیں، محیط پر ایک نقطہ
ن ایسا معلوم کرو کہ \angle ن + \angle ب کم سے کم ہو۔ [دیکھو مسئلہ نظری ۵۶]

۱۹۔ وتر \angle ب پر ایک قطعہ دائرہ بنایا گیا ہے، اس کی قوس پر ایک
نقطہ ج ایسا معلوم کرو کہ \angle ج اور ب ج کا مجموعہ زیادہ سے زیادہ ہو۔

۲۰۔ \angle ن تمام مثلثوں میں سے جو ایک دائرہ کے اندر بن سکتے ہیں
بڑے سے بڑے محیط والا مثلث متساوی الاضلاع مثلث ہے۔

۲۱۔ \angle ن تمام مثلثوں میں سے جو ایک دائرہ کے اندر بن سکتے ہیں
بڑے سے بڑے رقبہ والا مثلث متساوی الاضلاع مثلث ہے۔

۲۲۔ \angle ن تمام مثلثوں میں سے جو ایک مثلث کے اندر بن سکتے ہیں
مثلث پائیں سب سے کم محیط والا مثلث ہے۔

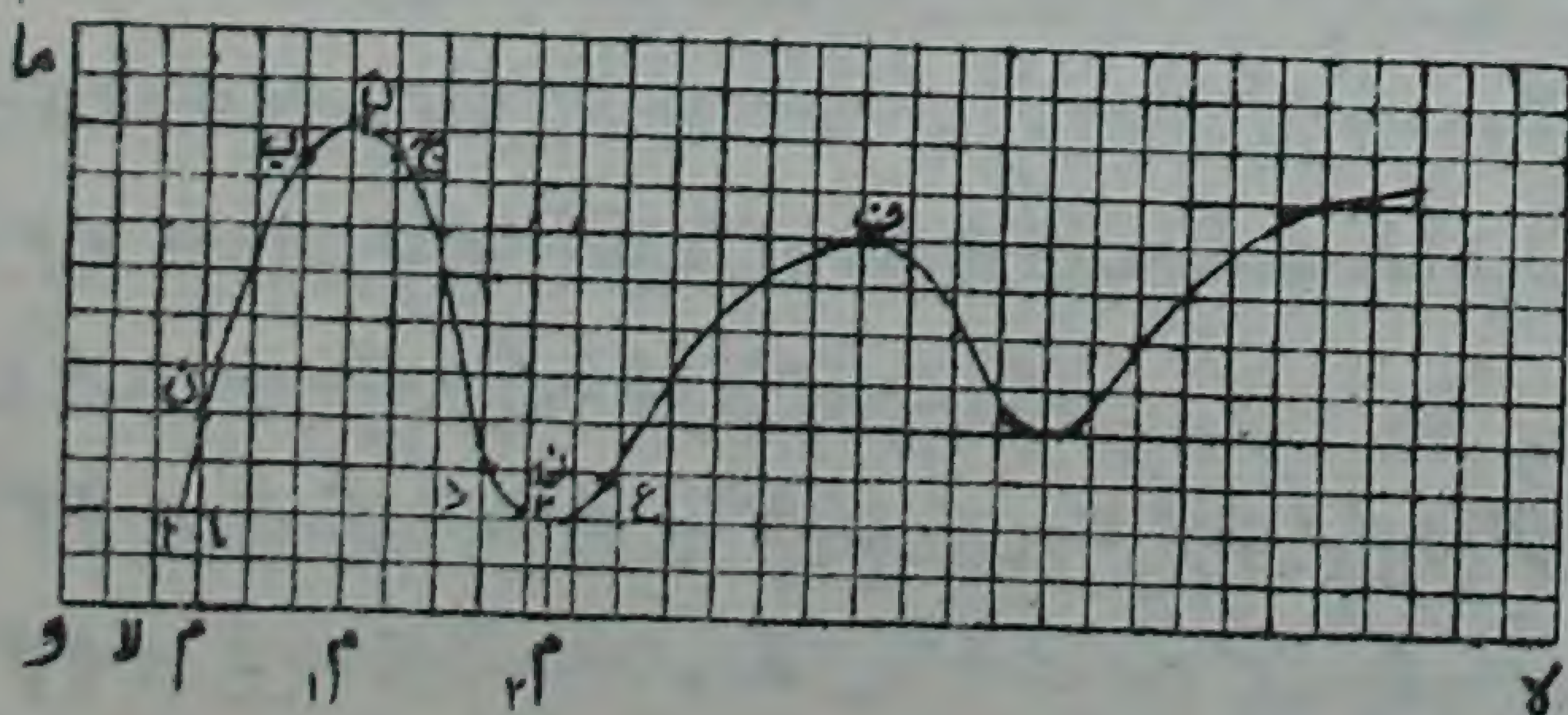
۲۳۔ ایک ہی رقبہ والے سب مستطیلوں میں سے کم سے کم محیط والا مستطیل مربع ہے۔

۲۴۔ بڑے سے بڑے رقبہ والا ایسا مثلث بناؤ جس کے زاویے ایک معلوم
مثلث کے زاویوں کے مساوی ہوں اور جس کے اضلاع تین نقاط معلومہ میں سے گزریں۔

۳۔ ترتیبیں اعظم اور اقل قیمتیں درست کرنے میں ان کا استعمال

کسی متغیر مقدار کی اعظم یا اقل قیمتوں کے متعلق جو سوال ہوں اکثر اوقات ان پر ترسیم کے ذریعہ آسانی بحث ہو سکتی ہے جہاں بدلنے والی مقدار کی مسلسل تبدیلیوں کو شکل میں واضح طور پر دکھایا جاتا ہے۔ ترسیمی عمل کے متعلق مزید معلومات حاصل کرنے کے لیے طالب علم ہال کی کتاب ”ترسیمی جبر و مقابلہ کی تمہید“ (انٹروڈکشن ٹو الجبرا) مطالعہ کرے۔ یہاں صرف ذیل کے عام طریق عمل کا ذکر کر دینا کافی ہوگا۔ جس متغیر مقدار کی مختلف قیمتوں کا معائنہ کرنا مقصود ہے اس کو ہم y سے تعبیر کریں گے اور جس مقدار کی رقوم میں x کو بیان کیا جائیگا اس کو x سے تعبیر کریں گے۔ محاورہ ” y کا x کے لحاظ سے y کی متناظر قیمتوں کو ترسیم کرنے سے کئی نقطے حاصل ہو سکتے۔ ان نقطوں میں سے مسلسل منحنی کھینچا جائیگا جس پر کے کسی نقطہ کا معین x کی معین قیمت کے جواب میں مقدار زیر بحث کی قیمت کو تعبیر کریں گے۔

اس طریقہ کا خاص فائدہ یہ ہے کہ ترسیم یا تصویر میں بدلنے والی مقدار کے مسلسل تغیرات صاف دکھائی دیتے ہیں اور x کی کسی قیمت کے جواب میں y کی قیمت فقط ترسیم کے معائنہ سے حاصل ہو سکتی ہے۔ بالخصوص اعظم اور اقل قیمتیں فوراً دیکھنے سے معلوم ہو سکتی ہیں۔



اوپر کی تصویر میں مسلسل منحنی AB ج D ع F ایک متغیر مقدار Q کی ترسیم کو تعبیر کرتا ہے۔ جیسے $\angle A$ بتدریج بڑھتا ہے معین MA محور OM کے متوازی دائیں جانب حرکت کرتا ہے اور کسی نقطہ پر جو اس کی قیمت ہے وہ LA کی متناظر قیمت کے جواب میں مقدار Q کی قیمت ہے۔ نقطہ N پر جو MA کی قیمت ہے وہ دونوں جانب پاس کے نقاط B یا C پر کی قیمتوں سے بڑی ہے پس N پر Q کی اعظم قیمت ہے۔ اسی طرح N پر MA کی قیمت ہر دو جانب پاس کے نقاط D اور E پر کی قیمتوں سے کم ہے اس لیے N پر Q اقل ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ اعظم یا اقل قیمتیں صرف موڑ کے نقطوں پر واقع ہوتی ہیں یعنی ایسے نقطوں پر جن کے معین اپنے معین پاس کے معینوں کی نسبت جبریہ طور پر بالترتیب بڑے یا چھوٹے ہوتے ہیں۔

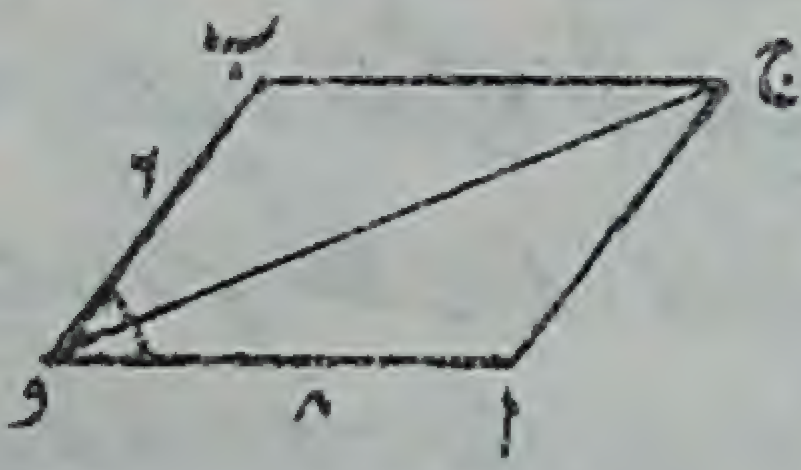
ذیل کی باتیں قابل توجہ ہیں:-

(۱) کسی مسلسل منحنی میں اعظم اور اقل قیمتیں متبادلاً (باری باری) واقع ہوتی ہیں۔

(۲) معین کی کسی دو مساوی قیمتوں کے درمیان اعظم یا اقل قیمت ضرور واقع ہوتی ہے۔

(۳) کسی نقطہ پر منحنی کا جو ڈھال ہے اس سے مقدار Q کی قیمت کے تغیر کی شرح ظاہر ہوتی ہے، نیز ہم دیکھتے ہیں کہ جس نقطہ پر اعظم یا اقل قیمت واقع ہوتی ہے وہاں پر منحنی کا ڈھال محور LA کے متوازی ہے۔

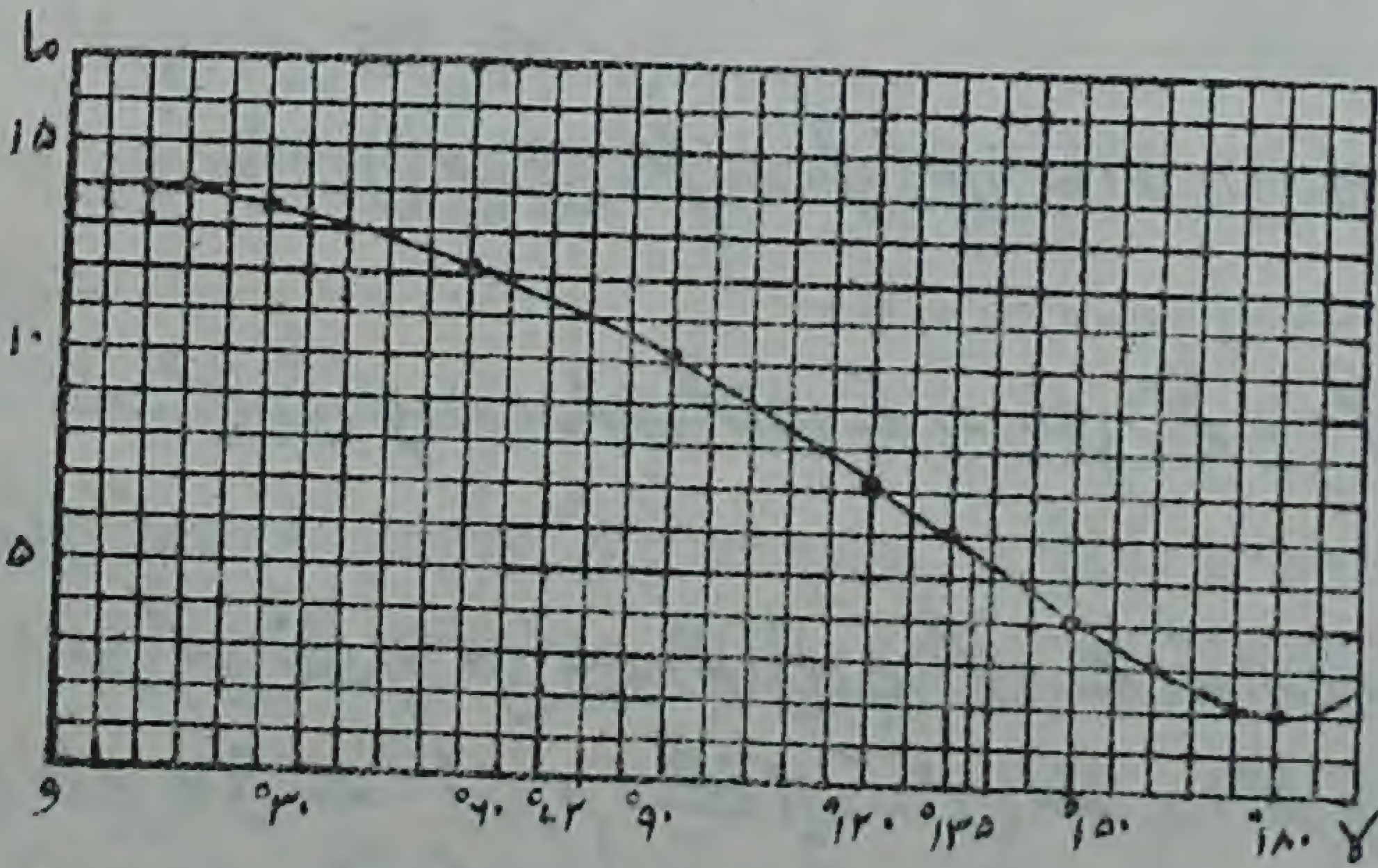
مثال ۱۔ AB ایک متوازی الاضلاع ہے جس میں $AB = ۱۰$ سنتی میٹر، $OB = ۶$ سنتی میٹر۔ OB کے گرد گھومتا ہے۔ جیسے زاویہ AOB صفر سے ۱۸۰ تک بڑھتا ہے وج مسلسل بدلتا ہے، اس کی تبدیلیوں کو مرتسم کرو اور ترسیم سے زاویہ ۲۲ کے جواب میں وج کی قیمت دیکھو اور زاویہ کی قیمت معلوم کرو جب کہ $OB = ۵.۶$ سنتی میٹر۔ زاویہ AOB کو بقدر ۳۰ کے بڑھانے اور سلسلہ دار شکلیں کھینچنے سے



وج اور Δ اوب کی
متناظر قیمتوں کے کئی جوڑے
پیمائش سے حاصل کرو اور ذیل
کی جدول بناؤ۔

وج	۰	۳۰	۶۰	۹۰	۱۲۰	۱۵۰	۱۸۰
Δ اوب	۱۳۶۰	۱۳۶۵	۱۴۶۲	۱۰۶۰	۷۶۲	۴۶۱	۲۶۰

زاویہ کو لا سے تعبیر کرو۔ اس کی متواتر قیمتوں کو محور لا پر ناپو، وج کی
متناظر قیمتوں کو معین مانو۔ اگر ولا کا ہر حصہ ۹° کو تعبیر کرے اور و صا پر سکا
ہر حصہ اسنتی میٹر کو، تو ذیل کی ترسیم حاصل ہوتی ہے:-



ترسیم سے ہم دیکھتے ہیں کہ جب $\Delta = ۱۳۶۰$ تو $\Delta = ۱۳۶۰$ اسنتی میٹر اور
جب $\Delta = ۱۳۶۵$ اسنتی میٹر تو $\Delta = ۱۳۶۵$ ۔

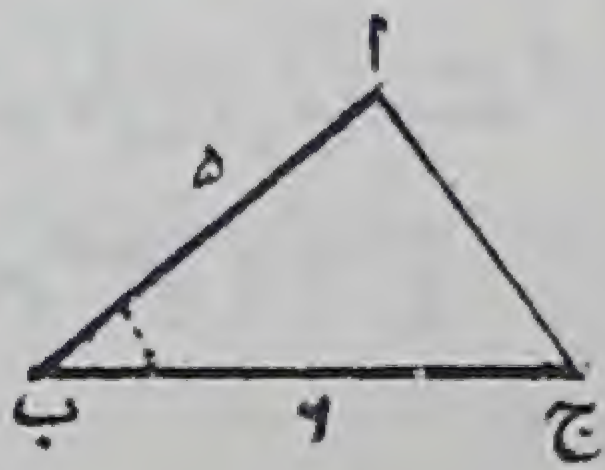
طالب علم کو اس سے بڑے پیمانہ پر الگ ترسیم بنانی چاہیے اور وج کی
قیمتوں کو ۱۸۰° سے ازا بڑے زاویوں کے لیے جاری رکھنا چاہیے۔ ایسا کرنے سے
اُسے معلوم ہوگا کہ وج اقل ہوتا ہے جب کہ زاویہ Δ اوب $= ۱۸۰^\circ$ ۔ نیز یہ ظاہر
ہے کہ ۳۶۰° پر وج کی قیمت پھر ۱۳۶۰ ہوتی ہے جو اعظم قیمت ہے۔

مثال ۲- ا ب ج ایک مثلث ہے جس میں ب ج، ج ا، ج ا

بالترتیب ۶ اور ۵ سنتی میٹر ہیں۔ اگر ب ج کو ثابت رکھا جائے اور ب ا کو ب کے گرد گھمایا جائے تو جیسے زاویہ ۰ سے ۱۸۰ تک بڑھتا ہے مثلث کے رقبہ کے تغیرات پر غور کرو، ترسیم کے ذریعہ ان تغیرات کی توضیح کرو اور معلوم کرو کہ زاویہ ب کی کس قیمت کے لیے رقبہ ۱۰ مربع سنتی میٹر ہوگا۔ نیز معلوم کرو کہ ب کی کس قیمت کے لیے رقبہ زیادہ سے زیادہ ہوگا۔

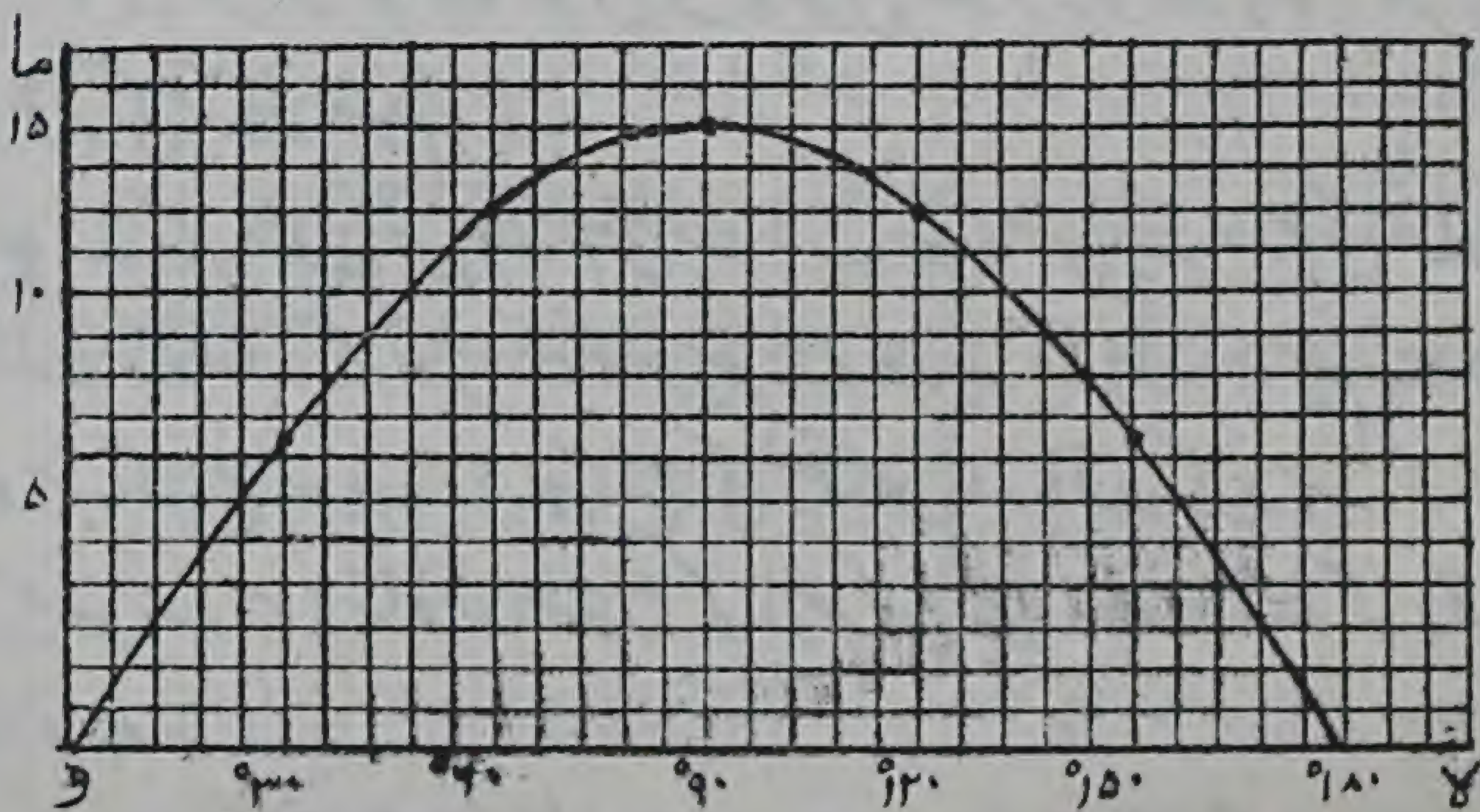
زاویہ ب کو بقدر ۳۰ کے بڑھاؤ اور مثلثوں کا ایک سلسلہ حاصل کرو۔

ہر صورت میں رقبہ معلوم کرو اور زاویہ اور رقبہ کی متناظر قیمتوں کو جدول ذیل میں حسب ذیل لکھو۔
[ملاحظہ ہو مثال ۵، صفحہ ۲۲۵
ترجمہ مکملن، جلد اول]



زاویہ	۰	۳۰	۶۰	۹۰	۱۲۰	۱۵۰	۱۸۰
رقبہ مربع سنتی میٹروں میں	۰	۷۶۵	۱۳۶۰	۱۵۶۰	۱۳۶۰	۷۶۵	۰

زاویہ کی قیمتوں کو محور لا پر ناپو اور رقبہ کی متناظر قیمتوں کو معین مانو۔ گذشتہ مثال کی اکائیوں کے مطابق حسب ذیل ترسیم حاصل کرو۔



شکل کے دیکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ معین کی بڑی سے بڑی قیمت ۱۵ ہے، اور یہ ۹۰ کے زاویہ کے جواب میں ہے۔

پس مثلث کا رقبہ زیادہ سے زیادہ اُس وقت ہوتا ہے جب کہ معلوم ضلعوں کا درمیانی زاویہ ۹۰ ہو۔

منہی سب سے بڑے معین کے گرد متشکل ہے، پس سوائے ۹۰ کے، زاویہ کی بالعموم دو قیمتیں ہیں جن کے جواب میں رقبہ کی ایک ہی قیمت حاصل ہوتی ہے جب رقبہ ۱۰ مربع سنتی میٹر ہو تو زاویہ کی دو قیمتیں ۴۲° اور ۱۳۸° ہوتی ہیں۔

نوٹ۔ مثلث ۱ ب ج کا رقبہ $\frac{1}{2} \times ۶ \times ۵ = ۱۵$ جب ۱۵ = ب ج، پس جیبوں کی جدول کی مدد سے ترسیم بنائی جاسکتی ہے [ملاحظہ ہو تنسیمی جبر و مقابلہ صفحہ ۲۹]

ترسیموں کے متعلق مشقیں

۱۔ خط لاہا پر ایک عمود ن ق کھینچا گیا ہے جس کا طول ۵ سنتی میٹر ہے۔ ن ر ایک ماثل خط ہے جو ن ق کے ساتھ زاویہ ۷۰ بنا رہے۔ وہ کو متواتر قیمتیں ۱۵، ۳۰، ۴۵، ۶۰، ۷۵ دینے سے پیمائش سے ن ر کی متناظر قیمتیں معلوم کرو اور ان نتائج سے جدول بناؤ۔ ن ر کے تغیرات کو ترسیم کے ذریعہ دکھاؤ اور (۱) اگر ۷۳ = تو ن ر کا طول معلوم کرو اور (۲) اگر ن ر = ۸۵ سنتی میٹر تو ۷ کی قیمت معلوم کرو۔

۲۔ ایک مثلث میں ۱ = سنتی میٹر، ب = ۵ سنتی میٹر، ج کی مختلف قیمتوں کے لیے مثلث کے رقبہ کے تغیرات کو ترسیم کے ذریعہ دکھاؤ۔ ترسیم سے (۱) رقبہ معلوم کرو جب کہ ج = ۷۳ (۲) ج کی قیمتیں دریافت کرو جب کہ رقبہ ۹۵ مربع سنتی میٹر ہو (۳) بتاؤ کہ اضلاع کو باہم کس طرح رکھا جائے کہ رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو۔

۳۔ دو سیدھی علی القوائم پٹیوں ج د، ج ع کے درمیان ۵ سنتی میٹر

لمبی ایک سلاخ ا ب پھسلتی ہے، طول ج ا کی مختلف قیمتوں کے لیے مثلث ب ج ا کے رقبہ کے تغیرات کو ترسیم کے ذریعہ دکھاؤ۔

ا ب کا مقام کیا ہو گا کہ رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو۔

۴۔ ۱۰۔ اسنتی میٹر لمبا ایک سیدھا خط ا ب، ن پر داخل تقسیم کیا گیا ہے، جیسے ن، ا سے ب تک حرکت کرتا ہے

$$(۱) \text{ ان } \times \text{ ن ب } (۲) \text{ ان } + \text{ ن ب}$$

کے تغیرات کو ترسیمی طریق پر دکھاؤ۔

ہر صورت میں ن کا مقام معلوم کرو جس سے اعظم یا اقل قیمت حاصل ہو۔

۵۔ ایک مثلث میں ج ۴۰ اسنتی میٹر اور ا = ۶۰، ب کی مختلف قیمتوں کے

لیے ا کی تبدیلیوں کو ترسیمی طریق پر دکھاؤ۔ ترسیم سے ا کی کم سے کم قیمت معلوم کرو۔ اس قیمت کے لیے مثلث کو بناؤ اور اپنے نتیجہ کی جانچ کرو۔

۶۔ نیم دائرہ کے قطر ا ب کے سرے ا میں سے خط ان محیط تک کھینچا

گیا ہے، زاویہ ن ا ب کی مختلف قیمتوں کے لیے مثلث ب ا ن کے رقبہ کے

تغیرات کی ترسیمی طور پر نشان دہی کرو۔ جب رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو تو اس زاویہ کی قیمت معلوم کرو۔

۷۔ مسئلہ نظری ۳ کے ذریعہ دکھاؤ کہ مساوات $ما = م لا$ (م مستقل ہے)

کی ترسیم ان مستقیم الاضلاع اشکال کے رقبہ کے تغیرات کو ظاہر کرتی ہے جو باہم

متشابه ہوں اور مسلسل طور پر بدلنے والے اضلاع پر متشابه طور پر بنائی جائیں۔ مربع

کے ضلع کے بدلنے سے اس کے رقبہ کے تغیرات کو دکھانے کے لیے ترسیم کھینچو اور ترسیم

اس مربع کا ضلع تقریباً معلوم کرو جس کا رقبہ ۱۱۶۸ مربع انچ ہو۔

۸۔ جن شخصوں کی مساواتیں حسب ذیل ہیں ان کی ترسیمیں کھینچو

$$(۱) ما = لا - \frac{لا^۲}{م} \quad (۲) ما = ۵ - ۳ لا - لا^۲$$

۵۔ ۳ لا۔ لا کی اعظم قیمت معلوم کرو۔

۴۔ موسیقی تقسیم تعریفیں

۱۔ اگر تین مقداریں ایسی ہوں کہ آخری جوڑے کا فرق پہلے جوڑے کے فرق کے مساوی ہو تو یہ مقداریں سلسلہ حسابیہ میں کہلاتی ہیں

مثلاً ۱، ب، ج سلسلہ حسابیہ میں ہونگی اگر

$$ج - ب = ب - ۱$$

ب کو ۱ اور ج کے درمیان اوسط حسابیہ کہتے ہیں۔

۲۔ اگر تین مقداروں میں سے تیسری کو دوسری کے ساتھ وہی نسبت ہو جو دوسری کو پہلی سے ہے تو یہ مقداریں سلسلہ ہندسیہ میں کہلاتی ہیں۔

مثلاً ۱، ب، ج سلسلہ ہندسیہ میں ہونگی اگر

$$\frac{ج}{ب} = \frac{ب}{۱}$$

ب کو ۱، ج کے درمیان اوسط ہندسیہ کہتے ہیں۔

۳۔ تین مقداریں ایسی ہیں کہ پہلی کو تیسری کے ساتھ وہی نسبت ہے جو پہلی اور تیسری کے حاصل تفریق کو دوسری اور تیسری کے حاصل تفریق کے ساتھ ہے۔ ایسی مقداریں سلسلہ موسیقیہ میں کہلاتی ہیں۔

مثلاً اگر ۱، ب، ج سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو

$$\frac{۱}{ج} = \frac{ب - ۱}{ج - ب}$$

ب کو ۱ اور ج کے درمیان اوسط موسیقی کہتے ہیں۔

نوٹ۔ چونکہ تعریف کی رُو سے

$$\frac{ب - ج}{ج} = \frac{ب - ا}{ا} \quad یا \quad \frac{ب - ج}{ب ج} = \frac{ا - ب}{ا ب}$$

$$\frac{ا}{ج} - \frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب} - \frac{ا}{ا}$$

اس لیے

پس ا، ب، ج کے الٹ $\frac{ا}{ج}$ ، $\frac{ا}{ب}$ ، $\frac{ا}{ا}$ سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔

یہ نتیجہ اکثر کار آمد ہوتا ہے۔

ہم - اگر دو معلومہ مقداروں ا، ب کے درمیان واسطہ حسابی، ہندسی، موسیقی بالترتیب ح، ہ، م ہوں تو اوپر کی تعریفوں سے لازم آتا ہے کہ

$$ح = \frac{ا + ب}{۲}، \quad ہ = \sqrt{ا ب}، \quad م = \frac{۲ ا ب}{ا + ب}$$

تعریف - اگر ایک محدود خط مستقیم کی اندر سے اور باہر سے اس طرح تقسیم کی گئی ہو کہ اندر کے حصّوں کی نسبت باہر کے حصّوں کی نسبت کے مساوی ہو تو اسے اصطلاحاً یوں بیان کرتے ہیں کہ خط کی موسیقی تقسیم کی گئی ہے۔

ق ب ن ا

مثلاً ا ب کی موسیقی ہوگی ن اور ق پر اگر

$$ان : ن : ب = ا ق : ب : ق$$

ن اور ق کو ا اور ب کے موسیقی مزدوج کہتے ہیں۔
اوپر کے تناسب کی رقوم کو بدلنے سے

$$ان : ا ق = ن : ب : ب ق$$

جس سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ن اور ق، ا ب کو داخلاً اور خارجاً ایک ہی نسبت سے تقسیم کریں تو ا اور ب، ن ق کو خارجاً اور داخلاً ایک ہی نسبت سے تقسیم کرتے ہیں۔ اس لیے ا اور ب نقاط ن اور ق کے موسیقی مزدوج ہیں۔

دوسرے الفاظ میں اگر اب کی ن اور ق پر موسیقی تقسیم ہو تو
ن کی ۱ اور ب پر موسیقی تقسیم ہوتی ہے۔

مثال ۱۔ اگر اب کی ن پر داخلہ اور ق پر خارجہ ایک
ہی نسبت سے تقسیم کی جائے تو ان اور اق کے درمیان اب
اوسط موسیقی ہوگا۔

ق ب ن ا

مفروض کی بنا پر اق : بق = ان : ن ب

متبادلاً اق : ان = بق : ن ب

اق : ان = اق - اب : اب - ان

اس لیے اق ، اب ، ان سلسلہ موسیقی میں ہیں۔

مثال ۲۔ اب کی ن اور ق پر موسیقی تقسیم کی گئی ہے،
اگر اب کا نقطہ وسطی و ہو تو ثابت کرو کہ

ون = وق = وا

ق ب ن و ا

چونکہ اب کی ن ، ق پر موسیقی تقسیم ہوتی ہے

اس لیے ان : ن ب = اق : بق

اس لیے ان - ن ب : ان + ن ب = اق - بق : اق + بق

۲ و ن : ۲ و ا = ۲ و ا : ۲ و ق

۲ و ن = ۲ و ق = ۲ و ا

اس لیے نیز ا ب کی ن اور ق پر موسیقی تقسیم ہوتی ہے

یعنی ا ن اور ا ق کے درمیان ا ب موسیقی اوسط ہے۔

متشابه قائم الزاویہ مثلثوں و ا ہ ، ہ ا ب سے

مسئلہ ۶۶، نتیجہ صریح

$$ا و \times ا ب = ا ہ^2$$

دو خطوط مستقیم کے درمیان جو ہندسی اوسط ہو وہ اُن کے حسابی

اور موسیقی اوسطوں کا وسط تناسب ہوتا ہے۔

مثال ۴۔ مثلث کا قاعدہ اور باقی اضلاع کی نسبت دونوں

معلوم ہیں، اس کا طریق دریافت کرو۔

ب ج دیا ہوا قاعدہ ہے اور ب ا ج کوئی ایسا مثلث اس پر بنایا گیا ہے کہ

$$ب ا : ا ج = نسبت معلومہ$$

ا کا طریق مطلوب ہے۔

د ب ا ج کی داخل اور

خارجاً ا ن اور ا ق سے متصفی کرو،

تب ن اور ق خط ب ج کو

اندرا اور باہر کی طرف سے اس طرح

تقسیم کرتے ہیں کہ

$$ب ن : ن ج = ب ق : ج ق = دی ہوئی نسبت$$

اس لیے ن اور ق ثابت نقطے ہیں۔

نیز چونکہ ا ن اور ا ق زاویہ ب ا ج کی داخل اور خارجاً متصفی کرتے ہیں

اس لیے ا ن ا ق قائم ہے۔

اس لیے ا کا طریق وہ دائرہ ہے جو ن ق کے قطر پر بنایا جائے۔

موسیقی تقسیم پر مشقیں

۱۔ لا اور ما پر ا ب کی موسیقی تقسیم کی گئی ہے، ثابت کرو کہ

$$(۱) \frac{۱}{۱۵} + \frac{۱}{۱۵} = \frac{۲}{۱۵}$$

$$(۲) \frac{۱}{۱۵} + \frac{۱}{۱۵} = \frac{۲}{۱۵}$$

۲ - لا اور سا نقاط ۱۵، ب کے موسیقی مزدوج ہیں۔

(۱) اگر ا ب = ۳ و ۲ اور ۱۵ = ۵ و ۱ تو ا ما معلوم کرو۔

(۲) اگر لا ما = ۵ و ۱ سنتی میٹر اور ا ما = ۲ سنتی میٹر تو ب ما معلوم کرو۔

۳ - کسی زاویہ کے بازو اور اس کے داخلی اور خارجی منصف ایک خط سے ملتے ہیں، ثابت کرو کہ نقاط تقاطع پر خط کی موسیقی تقسیم ہوتی ہے۔

۴ - تین نقطے ب، ن، ج ایک خط مستقیم پر ہیں، اُس نقطہ کا طریق معلوم کرو جس پر ب ن اور ن ج کے سامنے مساوی زاویے بنتے ہیں۔

۵ - مثلث کے قاعدہ کے وسطی نقطہ میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو ایک ضلع کو کاٹتا ہے، اس میں سے گزرنے والے قاعدہ کے متوازی خط کو کاٹتا ہے اور باقی ضلع مخروط کو قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس طرح خط کی موسیقی تقسیم ہوتی ہے۔

۶ - مثلث کے قاعدہ پر کے ایک زاویہ سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو قاعدہ کے وسطی (وسطی) کو مقابل کے ضلع کو اور اس سے قاعدہ کے متوازی جو خط کھینچا جائے اُس کو کاٹتا ہے، ثابت کرو کہ خط کی موسیقی تقسیم ہوتی ہے۔

۷ - ایک خط پر ب، ق نقاط ۱۵، ب کے موسیقی مزدوج ہیں اور ج خط کے باہر ایک نقطہ ہے، اگر زاویہ ب ن ج ق قائم ہو تو ثابت کرو کہ ج ن اور ج ق زاویہ ا ج ب کے داخلی اور خارجی منصف ہیں۔

۸ - ا ب خط مستقیم ہے، واس کا نقطہ وسطی ہے اور لا، ما پر اس کی موسیقی تقسیم کی گئی ہے۔

جیسے لا نقطہ و سے ب تک حرکت کرتا ہے، ما کے مقام کے تغیرات کی پیروی کرو۔ اگر ا ب = ۲۰ سنتی میٹر تو لا کے بدلنے سے و ما کے تغیرات دکھانے کے لیے ترسیم کھینچو۔

۵۔ معلوم طول کے دو خطوط مستقیم کے درمیان موسیقی اوسط معلوم کرنے کے لیے جو ذیل کا عمل درج کیا گیا ہے اس کی صحت ثابت کر دو۔

۱۔ اب ج د دیے ہوئے خط ہیں، ان کو اس طرح رکھو کہ یہ باہم متوازی ہوں۔ ان کے سروں کو ایک ہی جانب ا ج اور ب د کے ذریعہ ملاؤ، اور مقابل کی جانب میں ا د اور ب ج کے ذریعہ ملاؤ۔ فرض کرو کہ موخر الذکر و پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں، خط ن و ق کو دیے ہوئے خطوں کے متوازی کھینچو، یہ نقطہ ن پر ا ج کو اور ق پر ب د کو کاٹتا ہے۔ ن ق مطلوبہ اوسط موسیقی ہے۔

تعریفات

۱۔ خط مستقیم پر نقطوں کے سلسلہ کو صف کہتے ہیں، اگر صف میں چار نقطے ہوں جن میں سے ایک جوڑے کے نقطے دوسرے جوڑے کے لحاظ سے موسیقی مزدوج ہوں تو ایسی صف کو موسیقی صف کہتے ہیں۔

۲۔ ایک ہی نقطہ میں سے گزرنے والے خطوط مستقیم کے سلسلہ کو پنسل کہتے ہیں۔ مشترک نقطہ تقاطع کو پنسل کا راس کہتے ہیں اور ہر ایک خط شعاع کہلاتا ہے۔ جب کسی نقطہ سے چار خط کھینچے جائیں جو موسیقی صف کے چار نقاط میں سے گزریں تو ایسی پنسل کو موسیقی پنسل کہتے ہیں۔

۳۔ خطوط مستقیم کے نظام کو جب ایک خط مستقیم کاٹے اس کو ہم قاطع خط یا صرف قاطع کہیں گے۔

۴۔ ایسے چار خطوط مستقیم کا نظام جن میں سے کوئی تین ایک ہی نقطہ میں سے نہ گزریں مکمل ذواربۃ الاضلاع کہلاتا ہے۔

ان خطوط میں سے دو دو کے تقاطع سے چھ نقطے ملینگے، ان کو ذواربۃ الاضلاع (چار ضلعی) کے راس کہتے ہیں، اور تین خطوط مستقیم جن میں سے ہر ایک متقابل کے راسوں کو ملاتا ہے قطر کہلاتے ہیں۔

موسیقی تقسیم کے متعلق مسائل

۱۔ اگر موسیقی پنسل کی ایک شعاع کے متوازی ایک قاطع کھینچا جائے تو باقی تین شعاعوں کے درمیان اس سے مساوی حصے کتنے ہیں اور برعکس اس کے۔

۲۔ موسیقی پنسل کی شعاعیں اپنے ہر ایک قاطع کو موسیقی نسبت سے تقسیم کرتی ہیں۔

۳۔ اگر موسیقی پنسل میں ایک شعاع دوسرے جوڑے کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرے تو یہ اپنی مزدوج شعاع پر علی القوائم ہوگی، اور برعکس اس کے اگر شعاعوں کے ایک جوڑے کے درمیان زاویہ قائم بنے تو یہ شعاعیں دوسرے جوڑے کے درمیانی زاویہ کی اندرونی اور بیرونی تنصیف کرینگی۔

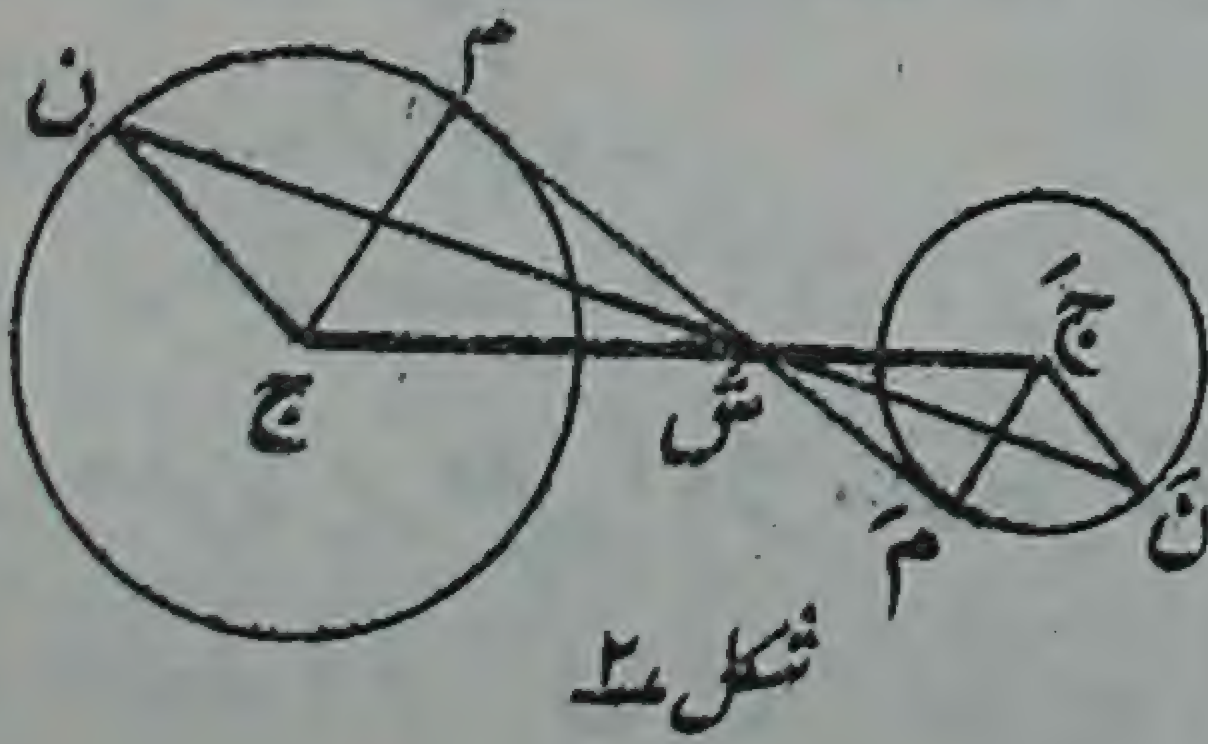
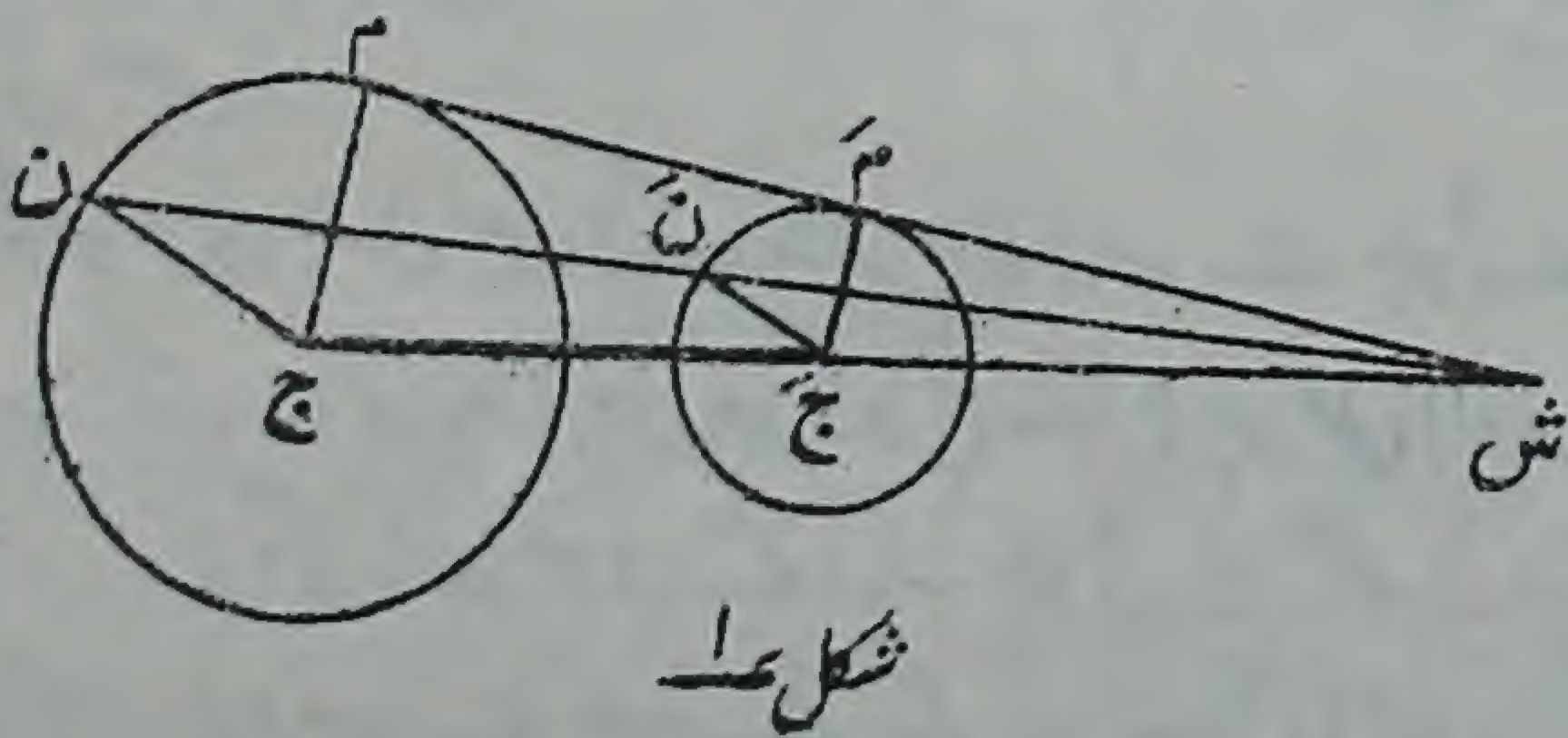
۴۔ دو موسیقی صفیں ۱، ن، ب، ط اور ۱، ن، ب، ط دو الگ الگ خطوط پر ہیں، اگر متناظر نقطوں کے تین جوڑوں کے ملانے والے خطوط ۱، ن، ب، ب، ایک ہی نقطہ میں سے گذریں تو ط ط بھی اسی نقطہ میں سے گذرے گا۔

۵۔ دو متقاطع خطوط پر دو موسیقی صفیں ۱، ن، ب، ق اور ۱، ن، ب، ق ہیں (جہاں ن، ب، ق اور ن، ب، ق متناظر نقطے ہیں) ثابت کرو کہ ن، ب، ب، ق، ق ہم نقطہ ہیں، نیز ن، ق، ب، ب، ق، ن ہم نقطہ ہیں۔

۶۔ اوپر کے نتیجہ کی مدد سے ثابت کرو کہ مکمل ذوالربعة الاضلاع میں کوئی سے دو قطر تیسرے کی موسیقی تقسیم کرتے ہیں۔

۵۔ مشابہت کے مرکز

مثال۔ دو دائروں میں دو متوازی نیم قطر کھینچے گئے ہیں (ہر ایک میں ایک) ان کے سروں کے ملائے والا خط مستقیم مرکزوں کے خط وصل کو دو ثابت نقطوں میں سے کسی نہ کسی ایک پر قطع کرتا ہے۔



دو دائرے جو جن کے مرکز بالترتیب ج، ج ہیں اور نیم قطر ر، ر۔
ج، ج، ج، ج دو متوازی نیم قطر ہیں، شکل ۱ میں دونوں ایک ہی رخ میں
کھینچے گئے ہیں اور شکل ۲ میں مقابل رخنوں میں۔ فرض کرو کہ ج، ج کو
ش پر کاٹتا ہے۔

یہ ثابت کرنا ہے کہ ج، ج، ج، ج خواہ کسی رخ میں کھینچے جائیں،
نقطہ تقاطع ش دو ثابت نقطوں میں سے ایک نہ ایک ہوگا۔
ثبوت۔ دونوں شکلوں میں مثلث ش ج، ج، ش ج، ج
مساوی الزوایا ہیں۔

$$ش : ج : ش : ج = ج : ن : ج : ن$$

$$= ر : ر$$

اس لیے ش خط ج ج کو { شکل ۱ میں خارجاً } ثابت نسبت ر : ر سے

تقسیم کرتا ہے۔

پس ہر ایک شکل میں ج ن، ج ن کی تمام سمتوں کے لیے ش ثابت نقطہ ہے۔

نتیجہ صریح۔ اگر م م دونوں دائروں کا مشترک مماس ہو، سیدھا شکل ۱

میں اور آڑا شکل ۱ میں

تو دونوں صورتوں میں نیم قطر ج م، ج م متوازی ہوں گے،

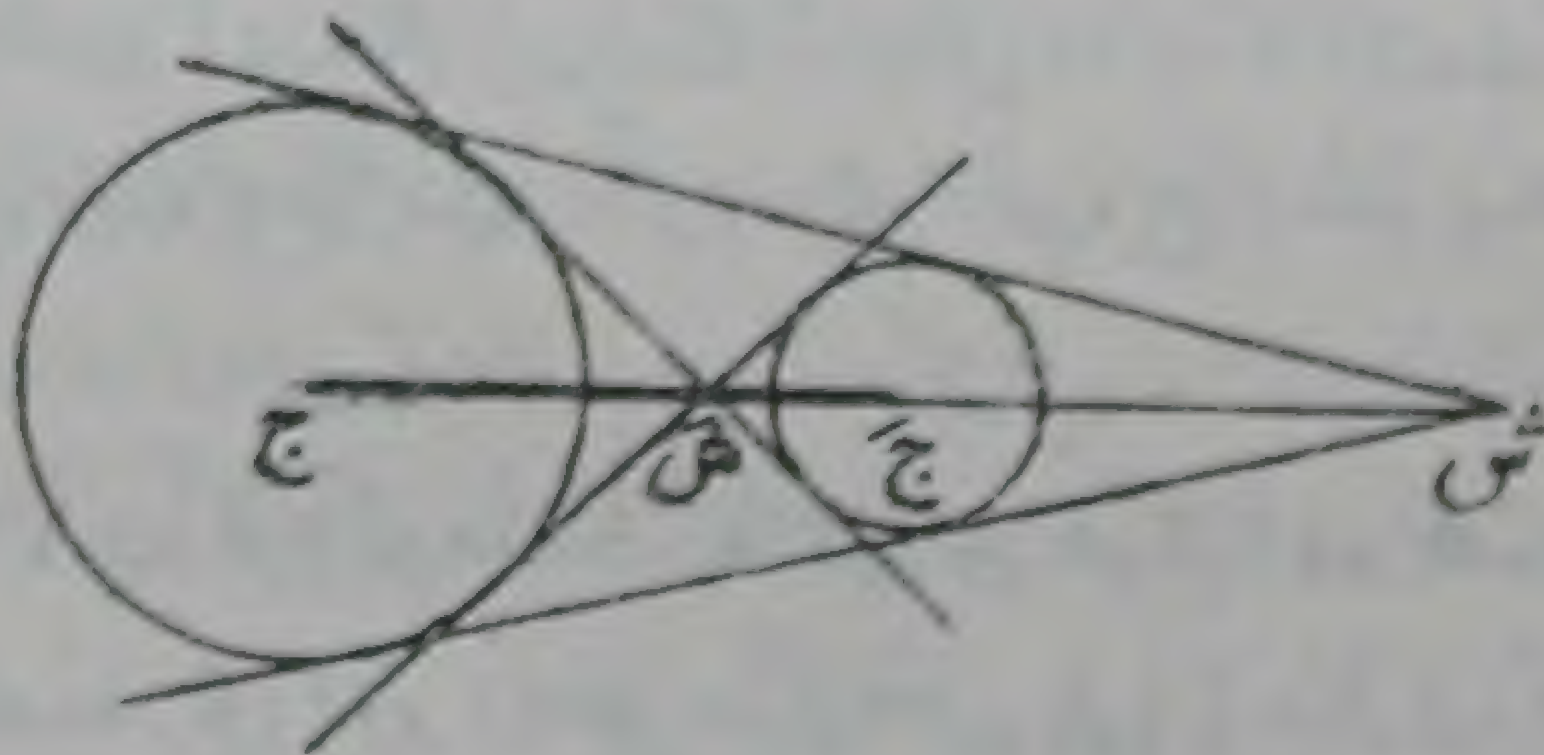
اس لیے م م مرکزوں کے خط کو ش پر کاٹینگا۔

تعریف۔ ذیل کی شکل میں دو دائرے ہیں، نقطہ ش، ش ان کے مرکزوں کے

ملانے والے خط کو ان کے نیم قطروں کی نسبت سے خارجاً اور داخلہ تقسیم کرتے ہیں، ش، ش

کو ہم مشابہت کے مرکز کہینگے، ش سیدھا مشابہت کا مرکز ہے اور ش آڑی

مشابہت کا۔



$$\text{نتیجہ۔ چونکہ } \frac{ش ج}{ش ج} = \frac{ر}{ر} = \frac{ش ج}{ش ج}$$

اس لیے دائروں کے مرکز، مشابہت کے مرکزوں کے ساتھ مل کر موسیقی صنف بناتے ہیں۔

اس لیے آڑے اور سیدھے مشترک محاسن مرکزوں کے خط وصل کو ایسے نقطوں پر کاٹتے ہیں جو اس خط ج ج کو موسیقی نسبت سے تقسیم کرتے ہیں۔

مشقیں

۱۔ ج اور ج کا فاصلہ = ۵ سنتی میٹر، ان کو مرکز مان کر دو دائرے کھینچو جن کے نیم قطر بالترتیب ۲ و ۳ سنتی میٹر اور ۲ و ۱ سنتی میٹر ہوں۔ (۱) ترسیمی طریق پر (۲) حساب سے ان کے مشابہت کے مرکزوں کا فاصلہ ج سے معلوم کرو۔

۲۔ دو دائروں کے مرکز ج، ج اور نیم قطر بالترتیب ۵ و ۱ اور ۵ و ۱ میں مشابہت کا سیدھا مرکز ج سے ۵ و ۱ کے فاصلہ پر ہے۔ (۱) دائروں کے مرکزوں کے درمیان (۲) ان کے مشابہت کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ معلوم کرو۔

۳۔ اوپر کی شکل ۱ اگرش ن دائرہ (ج) کو ق پر اور دائرہ (ج) کو ق پر دو بارہ کالے تو ثابت کرو کہ

$$\text{ش ق} \times \text{ش ن} = \text{ش ن} \times \text{ش ق} = \text{ش م} \times \text{ش م}$$

۴۔ مثلث اب ج میں سے اندرونی دائرہ کا مرکز ہے اور ہے، ۱ کے سامنے کے خارجی دائرہ کا مرکز ہے۔ اگر ۱ ہے، ب ج کو ما پر کاٹے تو ثابت کرو کہ ۱ اور ما ان دو دائروں کے مشابہت کے مرکز ہیں۔

۵۔ ثابت کرو کہ مثلث کا عمودی مرکز ۱ اور ہندسی مرکز بالترتیب مشابہت کے خارجی ۱ اور داخلی مرکز ہیں بلحاظ مثلث کے حائظ ۱ اور نو نقطہ دائروں کے۔

۶۔ اگر ایک متغیر دائرہ دو ثابت دائروں کو مس کرے تو نقاط تماس کے ملائے والا خط، مشابہت کے ایک مرکز میں سے گزرتا ہے، مختلف صورتوں میں تمیز کرو۔

۷۔ دائرہ کھینچو جو دو دیے ہوئے دائروں کو مس کرے اور ایک نقطہ معلومہ میں سے گزرے۔

۸۔ دائرہ کھینچو جو تین معلومہ دائروں کو مس کرے۔

۹۔ ج، ج، ج، ج تین معلومہ دائروں کے مرکز ہیں۔ جوڑے

ج، ج، ج کے لحاظ سے مشابہت کے داخلی اور خارجی مرکز بالترتیب ش، ش، ش ہیں، باقی دو جوڑوں کے لحاظ سے ش، ش، ش، ش، ش کے وہی معنی ہیں جو پہلی صورت میں بیان ہوئے۔ ثابت کرو کہ

(۱) ش، ج، ش، ج، ش، ج متراکز ہیں۔

(۲) چھ نقطوں ش، ش، ش، ش، ش، ش میں سے

تین تین لکڑیاں خطوط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں
[ملاحظہ ہوں آگے، سیوا اور عینی اس کے مسائل]

علی القوائم دائرے

تعریف۔ دائرے جو اس طرح قطع کریں کہ نقطہ تقاطع پر ان کے مماس ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں تو ایسے دائروں کو علی القوائم دائرے یا قائم دائرے کہتے ہیں۔

۱۔ اگر دو دائرے ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کریں تو نقطہ تقاطع پر یہ دائرہ کا مماس دوسرے دائرہ کے مرکز میں سے گذرتا ہے۔

۲۔ اگر دو دائرے ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کریں تو ان کے مرکزوں کے درمیانی فاصلہ کا مربع ان کے نیم قطروں کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

۳۔ ان دائروں کے مرکزوں کا طریق معلوم کرو جو ایک دائرہ معلومہ کو ایک معلومہ نقطہ پر علی القوائم قطع کریں۔

۱۔ دائرہ کھینچو جو ایک نقطہ معلومہ میں سے گزرے اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو ایک نقطہ معلومہ پر علی القوائم قطع کرے۔

۶۔ قطب اور قطبی

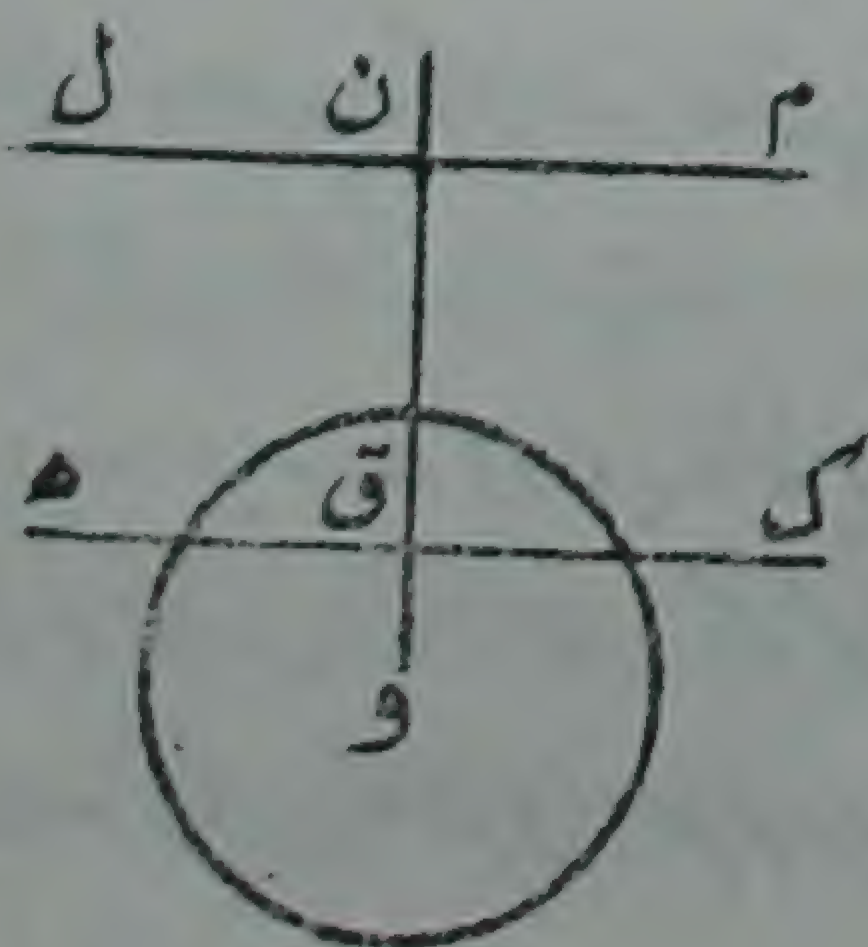
تعریفیں

۱۔ ایک دائرہ کے مرکز میں سے ایک خط مستقیم کھینچا گیا ہے اور اس پر دو نقطے ایسے لیے گئے ہیں کہ مرکز سے ان کے جو فاصلے ہیں ان کا حاصل ضرب نیم قطر کے مربع کے مساوی ہے۔ ایسے دو نقطوں کو ایک دوسرے کا مقلوب کہتے ہیں۔

نیچے کی شکل میں $و$ دائرہ کا مرکز ہے، اگر $ون \times وق = (نیم قطر) \times (نیم قطر)$ میں سے ہر ایک نقطہ دوسرے نقطہ کا مقلوب ہے۔

ظاہر ہے کہ اگر ان نقطوں میں سے ایک، دائرہ کے اندر واقع ہو تو دوسرا باہر واقع ہوگا۔

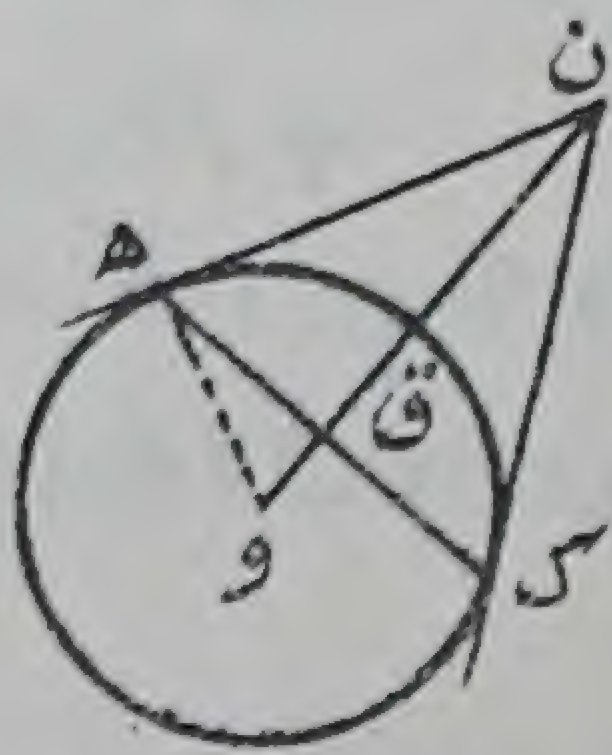
۲۔ ایک دائرہ کے لمحات سے کسی نقطہ معلومہ کا قطبی وہ خط مستقیم ہے جو اس نقطہ کے مقلوب میں سے کھینچا جائے اور نقطہ معلومہ اور مرکز کے ملانے والے خط پر عمود وار ہو۔ بلحاظ دائرہ کے نقطہ معلومہ اس خط کا قطب کہلاتا ہے۔



مثلاً اوپر کی شکل میں اگر $ون \times وق = (نیم قطر)^2$ اور اگر $ن$ اور $ق$ میں سے $ل$ م، $ھ$ ک بالترتیب $ون$ پر عمود وار کھینچے جائیں تو $ھ$ ک نقطہ $ن$ کا قطبی ہوگا اور $ن$ بلحاظ دائرہ کے خط $ھ$ ک کا قطب ہوگا۔ نیز $ل$ م قطبی ہے نقطہ $ق$ کا اور $ق$ قطب ہے $ل$ م کا۔

ظاہر ہے کہ بیرونی نقطہ کا قطبی دائرہ کو قطع کرتا ہے اور اندرونی نقطہ کا قطبی دائرہ کے بالکل باہر واقع ہوتا ہے۔ نیز محیط پر کے کسی نقطہ کا قطبی خود اس نقطہ پر مماس ہے۔

مثال ۱۔ دائرہ کے لحاظ سے کسی بیرونی نقطہ کا قطبی اُن مماسوں کا وتر تماس ہے جو نقطہ مذکور سے دائرہ تک کھینچے جائیں۔



دائرہ کا مرکز $و$ ہے، $ن$ سے

دائرہ کے دو مماس $ن$ ھ، $ن$ ک کھینچو۔
 $ھ$ ک کو ملاؤ،

یہ ثابت کرنا ہے کہ $ھ$ ک،

$ن$ کا قطبی ہے۔

ظاہر ہے کہ $ون$ وتر تماس

$ھ$ ک کو $ق$ پر علی القوائم قطع کرتا ہے،
 وہ کو ملاؤ۔

متشابه مثلثوں $ن$ وھ، $ھ$ و $ق$ سے

$$ون : وھ = وھ : وق$$

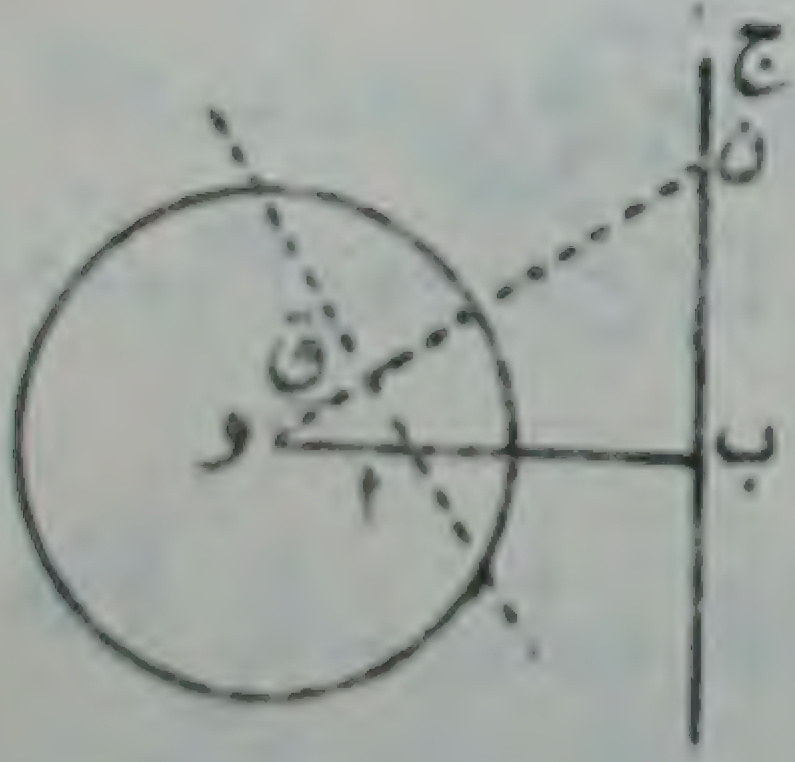
اس لیے $ون \times وق = (نیم قطر)^2$

اس لیے $ھ$ ک، $ن$ کا قطبی ہے۔

مثال ۲۔ ۱ اور ۱ سے نقطے ہیں کہ بلحاظ دائرہ کے

۱ کا قطبی $ن$ میں سے گزرتا ہے۔ ثابت کرو کہ $ن$ کا قطبی ۱ میں سے گزرے گا۔

دائرہ کا مرکز وہ ہے، فرض کرو کہ α کا قطبی بلحاظ دائرہ کے B ج ہے اور B ج، N میں سے گزرتا ہے۔
یہ ثابت کرنا ہے کہ N کا
قطبی α میں سے گزرتا ہے۔



ON کو ملاؤ اور α سے
 ON پر عمود MQ کھینچو، ہمیں ثابت کرنا
ہے کہ MQ ، N کا قطبی ہے۔
اب چونکہ B ج، α کا قطبی
ہے اس لیے α B ج قائمہ
ہے۔

[تعریف ۲، صفحہ ۱۲۲]

اور α MQ قائمہ ہے۔ عمل کی رو سے

اس لیے چار نقطے α ، B ، N ، Q ہم محیط ہیں۔

[مسئلہ ۵۸]

اس لیے $وق \times ون = و\alpha \times وب$

= (نیم قطر) کیونکہ B ج، α کا قطبی ہے۔

نیز چونکہ MQ عمود وار ہے ON پر

اس لیے MQ ، N کا قطبی ہے۔

یعنی N کا قطبی α میں سے گزرتا ہے، مسئلہ ثابت ہوا۔

نوٹ۔ ایسا ہی ثبوت اُس صورت میں صادق آئیگا جہاں دیا ہوا نقطہ α

دائرہ کے باہر واقع ہو اور اس کا قطبی B ج دائرہ کو کاٹے۔

اس مسئلہ کو قطب اور قطبی کی متکافی خاصیت سے موسوم کرتے ہیں۔

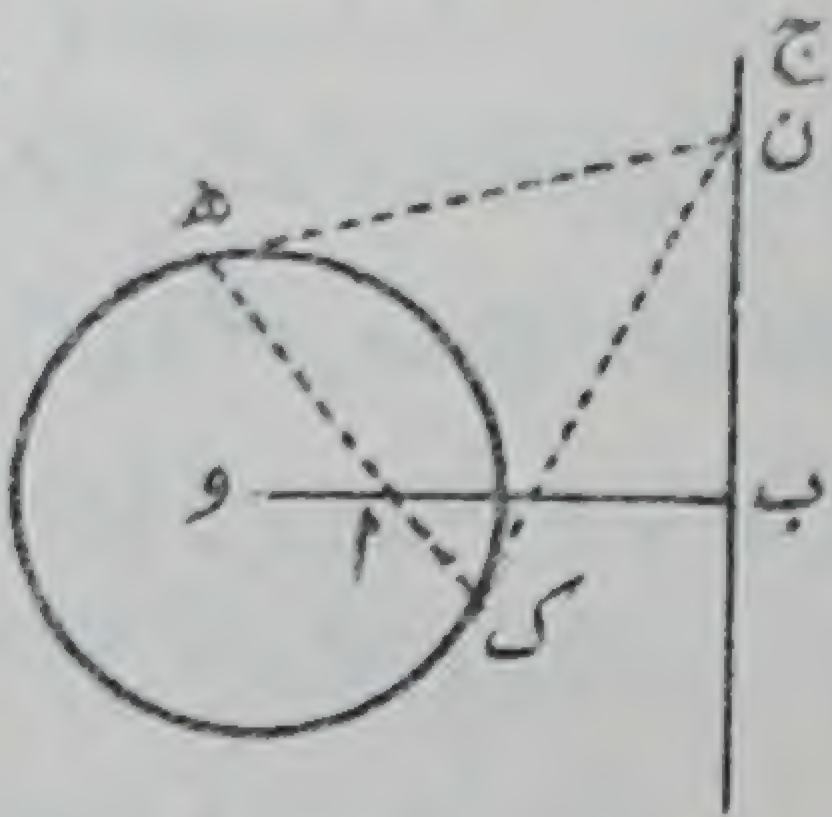
مثال ۳۔ دائرہ کے اندر ایک نقطہ ہے، اس میں سے دائرہ

کے وتر کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان وتروں کے سروں پر جو ماس

کھینچ سکتے ہیں ان کے تقاطع کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو نقطہ مفروضہ

کا قطبی ہے۔

فرض کرو کہ α دائرہ کے اندر
دیا ہوا نقطہ ہے اور h ک کوئی وتر
ہے جو α میں سے گذرتا ہے۔ نیز فرض
کرو کہ h اور k پر کے مماس n پر
قطع کرتے ہیں۔



یہ ثابت کرنا ہے کہ n کا

طریق α کا قطبی ہے۔

(عہ) ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ

n ، α کے قطبی پر واقع ہے۔

چونکہ h ک اُن مماسوں کا وترِ تماس ہے جو n سے کھینچے گئے ہیں

[مثال ۱ صفحہ ۱۲۳]

اس لیے h ک، n کا قطبی ہے۔

لیکن h ک جو n کا قطبی ہے α میں سے گذرتا ہے،

[مثال ۲ صفحہ ۱۲۳]

اس لیے α کا قطبی n میں سے گذرتا ہے

یعنی n ، α کے قطبی پر واقع ہے۔

(ب) اب ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ α کے قطبی پر کا کوئی نقطہ دیے ہوئے

شرائط کو پورا کرتا ہے۔

فرض کرو کہ $ج$ ، α کا قطبی ہے اور اس قطبی پر کوئی نقطہ n ہے۔

مماس n ، $ھ$ ، n ک کھینچو اور فرض کرو کہ ان کا وترِ تماس h ک ہے۔

مثال ۱، صفحہ ۱۲۳ سے ہم جانتے ہیں کہ وترِ تماس h ک، n کا

قطبی ہے۔

نیز ہم جانتے ہیں کہ n کے قطبی کو لازماً α میں سے گذرنا چاہیے کیونکہ n ،

[مثال ۲، صفحہ ۱۲۳]

$ج$ پر واقع ہے جو α کا قطبی ہے

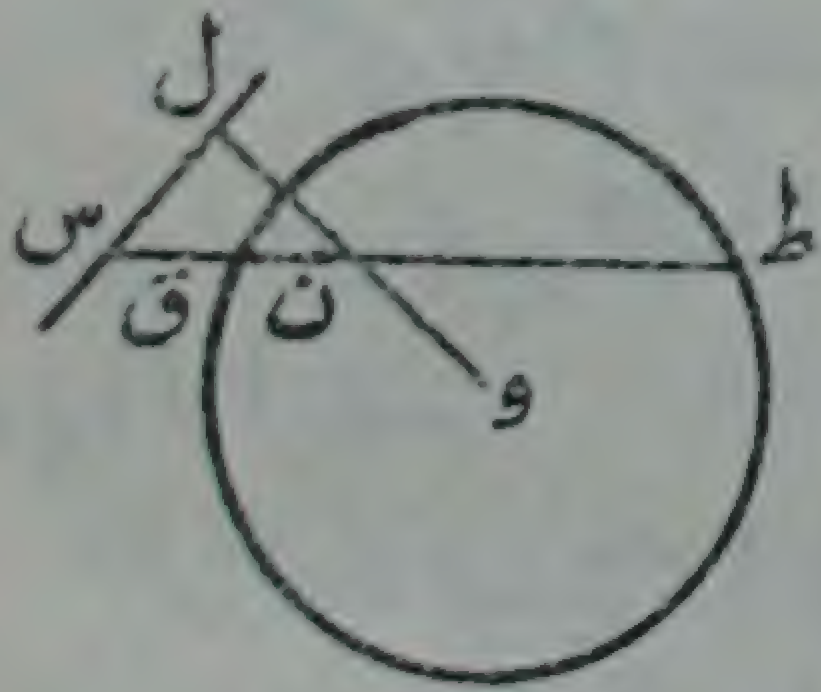
یعنی h ک، α میں سے گذرتا ہے۔

پس معلوم ہوا کہ n اُن مماسوں کا نقطہ تقاطع ہے جو α میں سے گذرنے والے

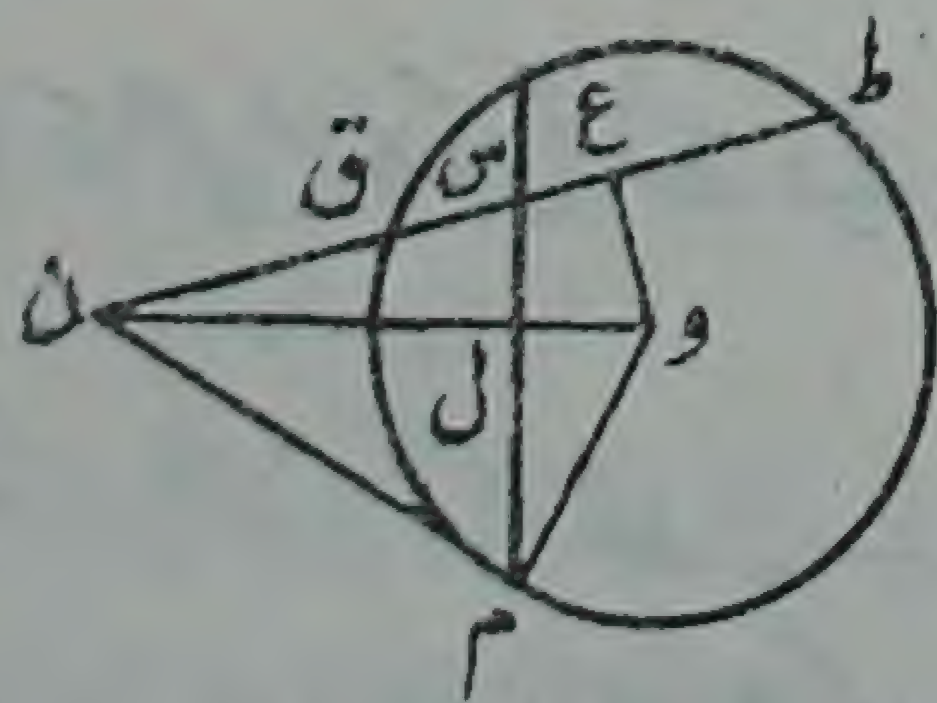
ایک وتر کے سروں پر کھینچے گئے ہیں۔

(ع) اور (ب) سے ہم دیکھتے ہیں کہ طریق مطلوب م کا قطبی ہے۔
نوٹ۔ اگر ا دائرہ کے باہر ہو تو مسئلہ (ع) درست رہیگا۔ لیکن اس کا عکس
(ب) ج پر کے سب نقطوں کی صورت میں درست نہیں ہوگا۔ کیونکہ اگر ا دائرہ کے
باہر ہو تو اس کا قطبی ب ج دائرہ کو کاٹے گا اور قطبی کے اس حصہ پر جو دائرہ کے اندر ہے
کوئی نقطہ ایسا نہیں ہو سکتا جو ماسوں کا نقطہ تقاطع ہو۔
پس ہم دیکھتے ہیں کہ

(۱) بلحاظ دائرہ کے بیرونی نقطہ کا قطبی اُن ماسوں کا وتر تماس ہے
جو اس نقطہ سے دائرہ تک کھینچے جائیں۔
(۲) اندرونی نقطہ کا قطبی اُن ماسوں کے تقاطع کا طریق ہے جو
اس نقطہ میں سے گزرنے والے وتروں کے سروں پر کھینچے جائیں۔
(۳) محیط پر کے کسی نقطہ کا قطبی خود اس نقطہ پر تماس ہوتا ہے۔
مثال ۴۔ ثابت نقطہ ن میں سے دائرہ کا وتر گزرتا ہے، ثابت کرو
ن اور ن کا قطبی اس کو موسیقی نسبت سے تقسیم کرتے ہیں۔



شکل ۱



شکل ۲

دائرہ کا مرکز و ہے اور ثابت نقطہ ن میں سے گزرنے والا وتر ق ط ہے۔

(۱) جب کہ ن دائرہ کے باہر ہو شکل ۱۔

ماس ن م کھینچو اور فرض کرو کہ ن کا قطبی، ون کو ل پر اور ق ط کو م

کاٹتا ہے۔

یہ ثابت کرنا ہے کہ ق ط کی ن اور س پر موسیقی تقسیم ہوتی ہے۔
ق ط پر عمود و ع کھینچو اور و م کو ملاؤ۔

$$\text{تب } ن ق \times ن ط = ن م$$

$$= ن ل \times ن و \text{ کیونکہ } ن م \text{ و قائمہ ہے۔}$$

$$= ن ع \times ن س \text{ کیونکہ س، ع، و، ل ہم محیط ہیں۔}$$

$$\text{اس لیے } ۲ ن ق \times ن ط = ۲ ن ع \times ن س$$

$$= (ن ق + ن ط) \times ن س \text{ [مثال ۹، صفحہ ۱۳۲ ترجمہ مکملن]}$$

[جسہ اول]

$$\text{اس لیے } ن س = \frac{۲ ن ق \times ن ط}{ن ق + ن ط}$$

اس لیے ن ق، ن س، ن ط سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔

یعنی ن س کی ق اور ط پر موسیقی تقسیم ہوتی ہے۔

نیز ق ط کی ن اور س پر موسیقی تقسیم ہوتی ہے۔

(۲) جب کہ ن دائرہ کے اندر ہو، ملاحظہ ہو شکل ۷۔

فرض کرو کہ ن کا قطبی س ل ہے۔

اب چونکہ ن کا قطبی س میں سے گزرتا ہے اس لیے س کا قطبی ن میں سے

گذرے گا،

اس لیے صورت اول کی رو سے ق ط کی س اور ن پر موسیقی تقسیم

ہوتی ہے۔

اس مسئلہ کو قطب اور قطبی کی موسیقی خاصیت سے موسوم کرتے ہیں۔

تعریف

اگر ایک مثلث اور دائرہ میں ایسا رشتہ ہو کہ مثلث کا ہر ایک ضلع مقابل

کے اس کا قطبی ہو تو مثلث کو بلحاظ دائرہ کے مزدوج بالذات کہتے

ہیں۔

قطب اور قطبی کے متعلق مشقیں

۱۔ دو نقطوں کو جو خط ملاتا ہے وہ بلحاظ ایک دیے ہوئے دائرہ کے ان کے قطبیوں کے نقطہ تقاطع کا قطبی ہوتا ہے۔

۲۔ کسی دو خطوط مستقیم کا نقطہ تقاطع ان کے قطبیوں کے ملانے والے خط کا قطب ہوتا ہے۔

۳۔ ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے جو خط گذرتے ہیں ان کے قطبیوں کا طریق معلوم کرو۔

۴۔ ایک دائرہ دیا ہوا ہے، نیز ایک ہم مرکز دائرہ ہے جس کے تماس کھینچے گئے ہیں، ان تماسوں کے قطبیوں کا طریق بلحاظ دائرہ معلوم کے دریافت کرو۔

۵۔ دو دائرے ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں اور ان میں سے ایک کا کوئی قطر ن ق ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا قطبی بلحاظ دوسرے دائرہ کے ق میں سے گذرتا ہے۔

۶۔ دو دائرے ایک دوسرے کو علی القوائم کاٹتے ہیں، ثابت کرو کہ ہر دائرہ کا مرکز بلحاظ دوسرے دائرہ کے ان کے وتر مشترک کا قطب ہے۔

۷۔ کسی دو نقطوں کے سامنے دائرہ کے مرکز پر جو زاویہ بنتا ہے وہ ان کے قطبیوں کے درمیانی زاویوں میں سے ایک زاویہ کے مساوی ہوتا ہے۔

۸۔ ایک دیے ہوئے دائرہ کا مرکز و ہے اور ا ب ایک ثابت خط مستقیم ہے۔

اب پر کوئی نقطہ ن لیا گیا ہے، دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے ن کا جو مقلوب ہے اس کا طریق معلوم کرو۔

۹۔ ایک دائرہ دیا گیا ہے اور اس کے محیط پر ایک ثابت نقطہ ہے،
ن ایک اور نقطہ اس کے محیط پر ہے۔ ن کے مقلوب نقطہ کا طریق بلحاظ
کسی دائرہ کے جس کا مرکز وہو معلوم کرو۔

۱۰۔ دو نقطے ۱ اور ۲ معلوم ہیں، نیز ایک دائرہ دیا گیا ہے جس کا
مرکز وہ ہے۔ ثابت کرو کہ ۱ اور ۲ اس عمود کا حاصل ضرب جو ۱ سے ۱ کے
قطبی پر کھینچا جائے مساوی ہے ۲ اور ۱ اس عمود کے حاصل ضرب کے
جو ۱ سے ۲ کے قطبی پر کھینچا جائے۔

۱۱۔ چار نقطے ۱، ۲، ۳، ۴ ترتیب وار ایک دائرہ کے محیط پر
لیے گئے ہیں، ۱، ۲، ۳، ۴ ب نقطہ ن پر قطع کرتے ہیں، ۱، ۲، ۳، ۴ ب نقطہ
ق پر ۱ اور ۲، ۳، ۴ ب نقطہ م پر۔ ثابت کرو کہ مثلث ن ق م بلحاظ
دائرہ کے مزدوج بالذات ہے۔

۱۲۔ بلحاظ ایک دائرہ کے ایک نقطہ کا قطبی معلوم کرنا ہے، اس
کے لیے کوئی خطی ترکیب بتاؤ۔ اس طرح کسی نقطہ بیرونی سے مماثل کھینچنے کی
خطی ترکیب حاصل کرو۔

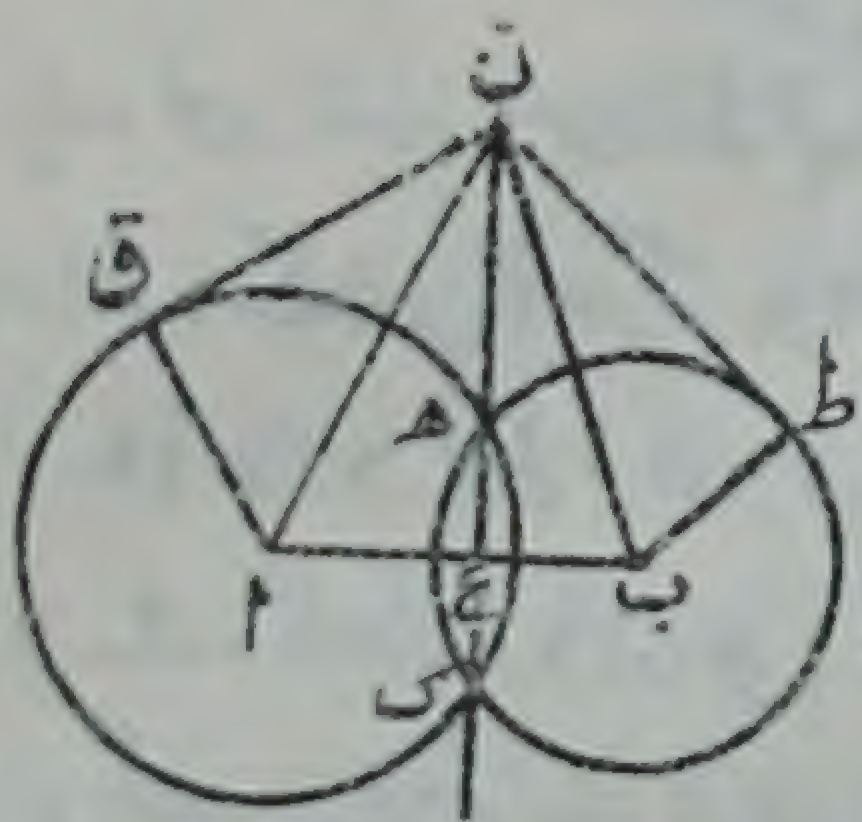
۱۳۔ اگر ایک مثلث بلحاظ ایک دائرہ کے مزدوج بالذات ہو تو
دائرہ کا مرکز مثلث کے عمودی مرکز پر ہوگا۔

۱۴۔ موسیقی صف کے چار نقطوں کے قطبی بلحاظ ایک دائرہ کے
ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں ۱ اور ۲ برعکس اس کے۔

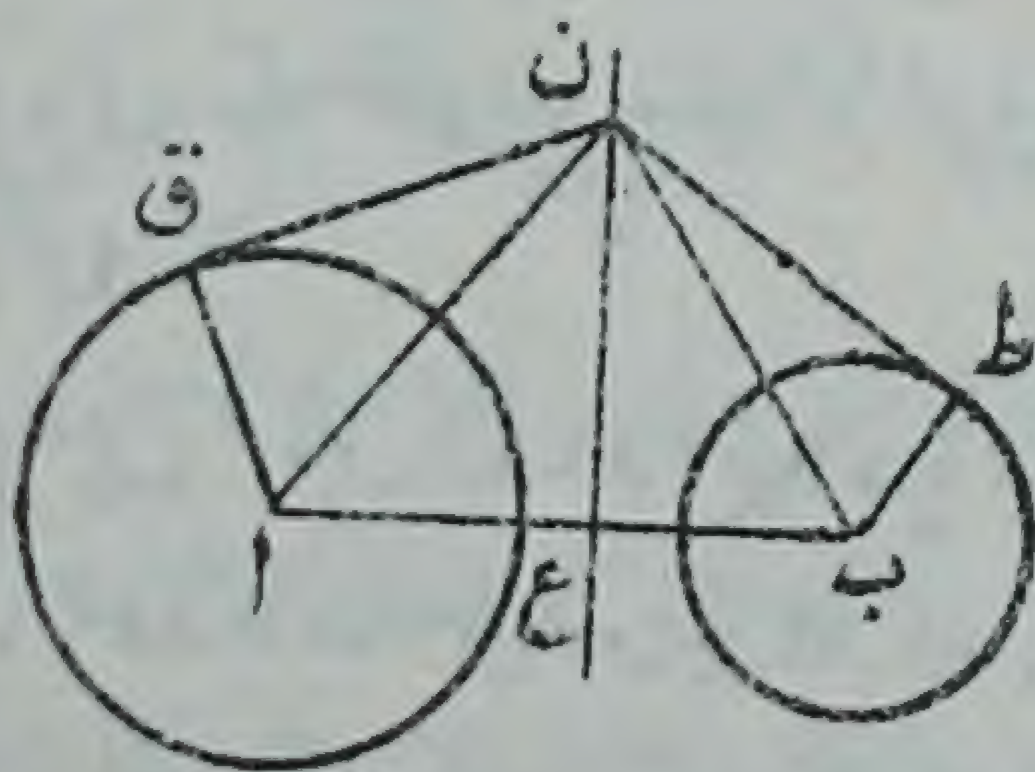
۱۔ بنیادی محور

مثال ۱۔ جن نقطوں سے دو معلومہ دائروں کے مساوی

مماس کھینچ سکیں ان کا طریق معلوم کرو۔



شکل ۲



شکل ۱

فرض کرو کہ ۱ اور ۲ دائروں کے مرکز ہیں اور ان کے نیم قطر بالترتیب ۱، ۲ ہیں۔ نیز فرض کرو کہ ۱ ایسا نقطہ ہے جس سے دائرہ (۱) کا مماس ۱ ن ق مساوی ہے دائرہ (۲) کے مماس ۲ ن ط کے۔

۱ ن کا طریق مطلوب ہے۔

۱ ن، ۲ ن، ۱ ق، ۲ ط، ۱ ب، ۲ ب کو ملاؤ۔

۱ ن سے ۱ ب پر عمود ۱ ع کھینچو۔

۱ ب ۱ ق = ۲ ن ط اس لیے ۱ ن ق = ۲ ن ط

لیکن ۱ ن ق = ۱ ن ا - ۱ ق ا اور ۲ ن ط = ۲ ن ب - ۲ ب ط [مسئلہ ۲۹]

اس لیے ۱ ن ا - ۱ ق ا = ۲ ن ب - ۲ ب ط

۱ ن ع + ۱ ع ا - ۱ ع ا = ۲ ن ع + ۲ ع ب - ۲ ب ع [مسئلہ ۲۹]

۱ ع ا - ۱ ع ا = ۲ ع ب - ۲ ب ع

پس ۱ ب، ۲ ب پر اس طرح تقسیم ہوتا ہے کہ ۱ ع ا - ۱ ع ا = ۲ ب ع - ۲ ب ع

اس لیے ۱ ع ایک ثابت نقطہ ہے۔

پس وہ تمام نقطے جن سے دو دائروں کے مساوی مماس کھینچ سکتے ہیں ایک

ایسے خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں جو ۱ ب پر عمود وار ہے اور ۱ ب کو ایسے

دو حصوں میں قطع کرتا ہے جن کے مربعوں کا فرق نیم قطروں کے مربعوں کے فرق

کے مساوی ہے۔

نقطہ و میں سے گذرتا ہے۔

۱۔ اب نقطہ و کو یا تو تینوں دائروں کے باہر واقع ہونا چاہیے یا تینوں کے اندر۔
۱۔ جب کہ و دائروں کے باہر واقع ہو۔

و سے تینوں دائروں کے تماس ون، وق، و ط کھینچو۔

چونکہ نقطہ و دائروں (۱) اور (ب) کے بنیادی محور پر واقع ہے، اس لیے

$$\text{ون} = \text{وق}$$

نیز نقطہ و دائروں (۱) اور (ج) کے بنیادی محور پر واقع ہے،

$$\text{اس لیے ون} = \text{و ط}$$

$$\text{اس لیے وق} = \text{و ط}$$

یعنی و دائروں (ب) اور (ج) کے بنیادی محور پر واقع ہے یعنی (ب)

اور (ج) کا بنیادی محور و میں سے گذرتا ہے۔

۲۔ اگر دائرے اس طرح قطع کریں کہ و تینوں دائروں کے اندر واقع ہو تو بنیادی محور

تین دائروں میں سے دو دو کے مشترک وتر ہونگے اور ہمیں یہ ثابت کرنا ہوگا کہ یہ تینوں

ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں، اگلے ثبوت سے مسئلہ اثباتی، ہ کی مدد سے اسے ہم ثابت

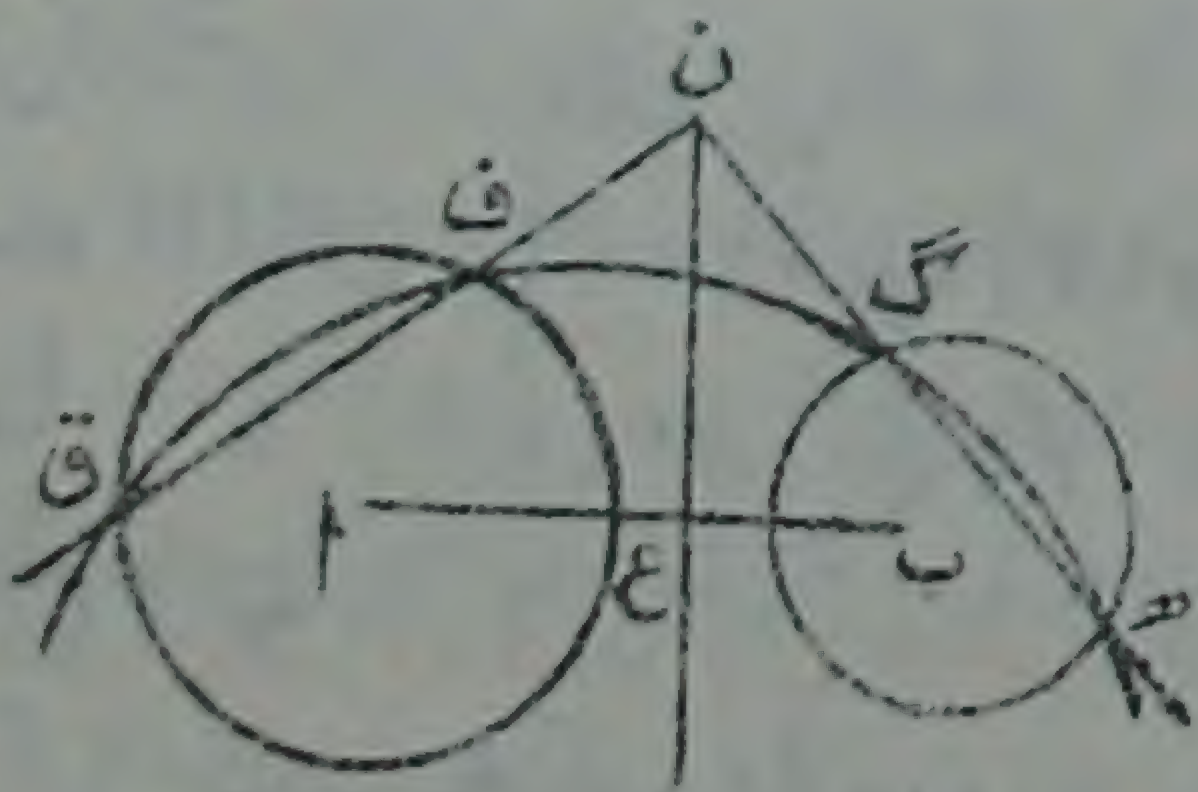
کر سکتے ہیں۔

تشریف: تین دائروں میں سے دو دو کو اکٹھا لینے سے تین بنیادی محور

حاصل ہوتے ہیں۔ ابھی ہم نے ثابت کیا ہے کہ یہ تینوں محور ایک ہی نقطہ میں سے

گذرتے ہیں۔ اس نقطہ کو بنیادی مرکز کہتے ہیں۔

مثال ۳۔ دو معلوم دائروں کے بنیادی محور کھینچنے کا عمل معلوم کرو۔



فرض کرو کہ ۱ اور ۲ دائروں کے مرکز ہیں۔

دائروں کا بنیادی محور دریافت کرنا مطلوب ہے۔

(۱) اگر دائرے ایک دوسرے کو کاٹیں تو ان کے نقاط تقاطع میں سے گزرنے والا

خط بنیادی محور ہوگا۔

(ب) لیکن اگر دائرے ایک دوسرے کو نہ کاٹیں تو کوئی دائرہ کھینچو جو انہیں

ق، ف اور گ، ہ پر کاٹے۔ ق، ف اور گ کو ملاؤ اور ان کو اتنا خارج کرو کہ

یہ ن پر ملیں۔

اب کو ملاؤ اور ن سے ۱ ب پر عمود ن ع کھینچو۔

تب ن ع دائروں (۱) اور (ب) کا بنیادی محور ہوگا۔

ثبوت۔ دائرہ ق، ف، گ، ہ سے ن، ق، ف، ہ = ن، ہ × ن، گ

ن سے دائرہ (۱) کے مماس کا مربع = ن، ق × ن، ف

اور ن سے دائرہ (ب) کے مماس کا مربع = ن، ہ × ن، گ

پس ن سے دائروں (۱) اور (ب) کے مماس مساوی ہیں۔

اس لیے ن بنیادی محور پر واقع ہے

اور چونکہ ن ع مرکزوں کے خط پر عمود وار ہے،

اس لیے ن ع بنیادی محور ہے۔

تعریف۔ اگر دائروں کا ایک نظام ایسا ہو کہ اس کے کسی دو دائروں کا

کا بنیادی محور وہی ہو تو اس کو دائروں کا ہم محور نظام کہتے ہیں، اور یہ سب دائرے

ہم محور دائرے کہلاتے ہیں۔

بنیادی محور پر مشقیں

۱۔ ثابت کرو کہ دو دائروں کا بنیادی محور ان کے کسی مشترک مماس کی

تضییف کرتا ہے۔

۲۔ دو دائروں کے بنیادی محور کے کسی نقطہ سے مماس کھینچے گئے ہیں اگر اس نقطہ کو مرکز اور کسی ایک مماس کو نصف قطر مان کر دائرہ کھینچا جائے تو یہ دونوں دائروں کو علی القوائم کاٹے گا۔ [ملاحظہ ہو تعریف صفحہ ۱۲۱]

۳۔ و تین دائروں کا بنیادی مرکز ہے، و سے کسی ایک دائرہ کا مماس و مم کھینچا گیا ہے، اگر و کو مرکز اور و مم کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ یہ تینوں دائروں کو علی القوائم کاٹتا ہے۔

۴۔ اگر تین دائروں میں سے کوئی دو دوسل کر ایک دوسرے کو ممس کریں تو ثابت کرو کہ نقاط مماس پر ان کے مشترک مماس ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

۵۔ مثلث کے اضلاع کو قطر مان کر تین دائرے کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کا بنیادی مرکز مثلث کا عمودی مرکز ہے۔

۶۔ وہ سب دائرے جو ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتے اور ایک دائرہ معلومہ کو زاویہ قائمہ پر کاٹتے ہیں ایک اور ثابت نقطہ میں سے بھی گزرتے ہیں۔

۷۔ ان سب دائروں کے مرکروں کا طریق معلوم کرو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور ایک دائرہ معلومہ کو زاویہ قائمہ پر کاٹتے ہیں۔

۸۔ دائرہ کھینچو جو دو نقاط معلومہ میں سے گزرتے اور ایک دائرہ کو زاویہ قائمہ پر کاٹے۔

۹۔ ان دائروں کے مرکروں کا طریق معلوم کرو جو دو معلومہ دائروں کو علی القوائم کاٹیں۔

۱۰۔ دائرہ کھینچو جو ایک نقطہ معلومہ میں سے گزرتے اور دو دائروں کو علی القوائم کاٹے۔

۱۱۔ کسی نقطہ سے دو دائروں کے مماس کھینچے گئے ہیں، ثابت

کرو کہ ان ماسوں کے مربعوں کا فرق = دو چند مرکزوں کے ملانے والے خط کا طول \times اس عمود کا طول جو نقطہ مذکور سے دائروں کے بنیادی محور تک کھینچا جائے۔

۱۲۔ ہم محور دائروں کا نظام ہے، یہ دائرے باہم قطع نہیں کرتے۔ کوئی نقطہ ان کے بنیادی محور پر لیا گیا ہے اور اس نقطہ سے کسی دائرہ کا ماس کھینچا گیا ہے، اگر اس نقطہ کو مرکز اور ماس کو نیم قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ یہ مرکزوں کے ملانے والے خط کو دو ثابت نقطوں پر کاٹے گا۔

[ان ثابت نقطوں کو نظام کے انتہائی نقطے کہتے ہیں]

۱۳۔ ہم محور دائروں کے نظام میں دو انتہائی نقطے اور وہ نقطے جہاں پر نظام کا کوئی دائرہ مرکزوں کے ملانے والے خط کو کاٹتا ہے مل کر موسیقی صنف بناتے ہیں۔

۱۴۔ ہم محور دائروں کے نظام میں کسی انتہائی نقطے کا قطبی بلحاظ تمام دائروں کے وہی ہوتا ہے۔

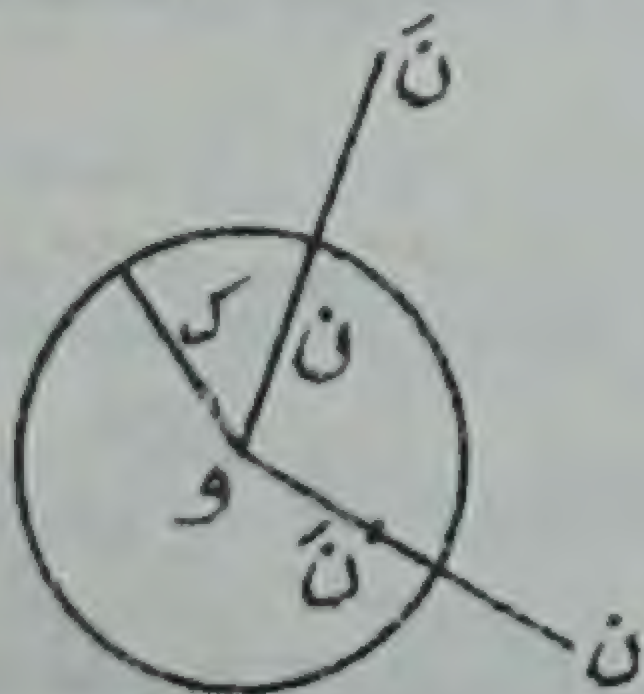
۱۵۔ اگر دو دائرے زاویہ قائمہ پر کاٹیں تو ان میں سے کوئی ایک، دوسرے دائرہ کے کسی قطر کی موسیقی تقسیم کرتا ہے۔

۸۔ تقلیب (یا الٹا)

تعریفیں

۱۔ ایک ثابت نقطہ و میں سے ایک خط مستقیم ون کھینچا گیا ہے اور ون، یا ون مدودہ پر ایک ایسا نقطہ ن لیا گیا ہے کہ ون \times ون = ک جہاں ک مستقل ہے۔ نقاط ن اور ن میں سے کسی ایک کو دوسرے نقطہ کا

مقلوب کہتے ہیں بلحاظ اُس دائرہ کے جس کا مرکز وہ ہے اور نیم قطر ک۔

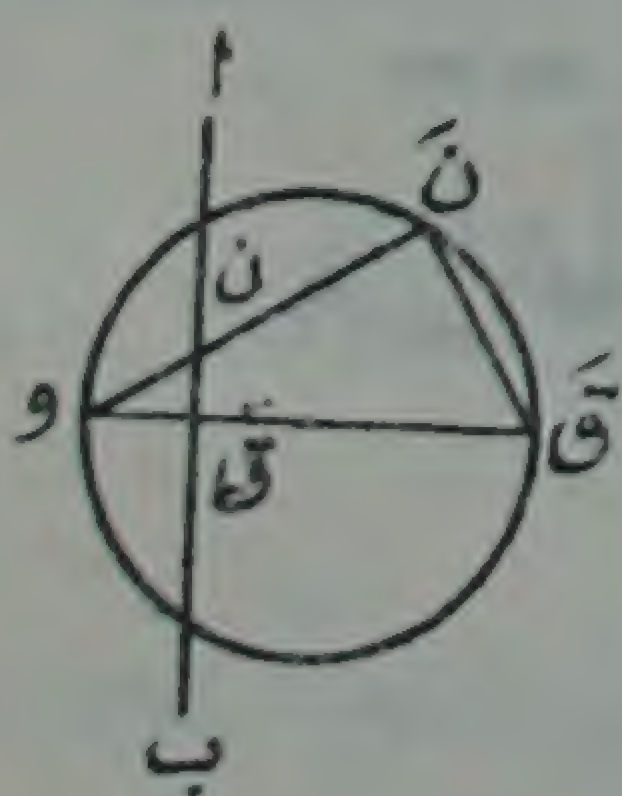


۲۔ و کو تقلیب کا مبداء اور ک کو تقلیب کا نیم قطر کہتے ہیں۔ ک بعض اوقات تقلیب کے مستقل کے نام سے موسوم ہوتا ہے۔

۳۔ اگر ن کوئی طریق مرتسم کرے تو ن کے ہر محل کے جواب میں ن کا متناظر مقام یا محل ہوگا اور ن جس طریق کو مرتسم کریگا اس کو ن کے طریق کا مقلوب کہیں گے۔

تعریف ۱۔ سے ظاہر ہے کہ مبداء میں سے گزرنے والا ہر خط اپنا خود مقلوب ہے۔

مثال ۱۔ ایک خط مستقیم تقلیب کے مبداء میں سے نہیں گذرتا، اس کا مقلوب معلوم کرو۔



فرض کرو کہ دیے ہوئے خط
ا ب پر کوئی نقطہ ن ہے، و مبداء
ہے اور ک تقلیب کا نیم قطر ہے۔
خط ا ب پر عمود وق کھینچو
ن اور ق کے مقلوب ن اور ق
بالترتیب معلوم کرو، ن ق کو ملاؤ۔

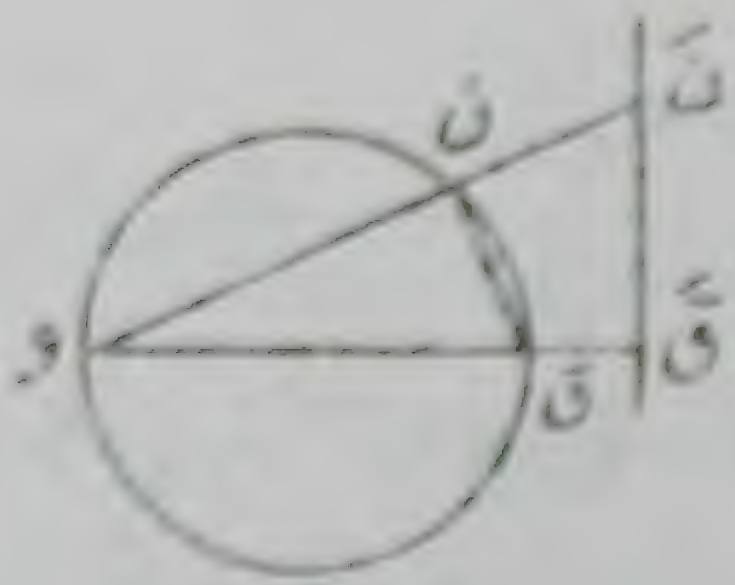
$$\text{تب } \text{ون} \times \text{ون} = \text{وق} \times \text{وق}$$

اس لیے نقاط ن، ن، ق، ق میں سے دائرہ گذر سکتا ہے

$$\text{اس لیے } \angle \text{ون ق} = \angle \text{وق ن} = \text{زاویہ قائمہ}$$

پس معلوم ہوا کہ N کا طریق ایک دائرہ ہے جو O میں سے گزرتا ہے اور اس کا قطر QQ' دیے ہوئے خط AB پر عمود وار ہے۔

مثال ۲۔ دائرہ کا مقلوب معلوم کرو بلحاظ ایک ایسے نقطہ کے جو اس کے محیط پر واقع ہے۔



فرض کرو کہ دائرہ معلومہ کا
وق قطر ہے جو مبداء O میں
سے گزرتا ہے۔

کوئی نقطہ N محیط پر لو،
تقلیب کے نیم قطر k کے لحاظ سے

فرض کرو کہ Q اور N کے مقلوب بالترتیب Q' اور N' ہیں۔
 NQ اور $N'Q'$ کو ملاؤ۔

$$تب \quad ON \times ON' = k^2$$

$$= QQ' \times QQ'$$

اس لیے نقاط N, N', Q, Q' میں سے دائرہ گذر سکتا ہے۔

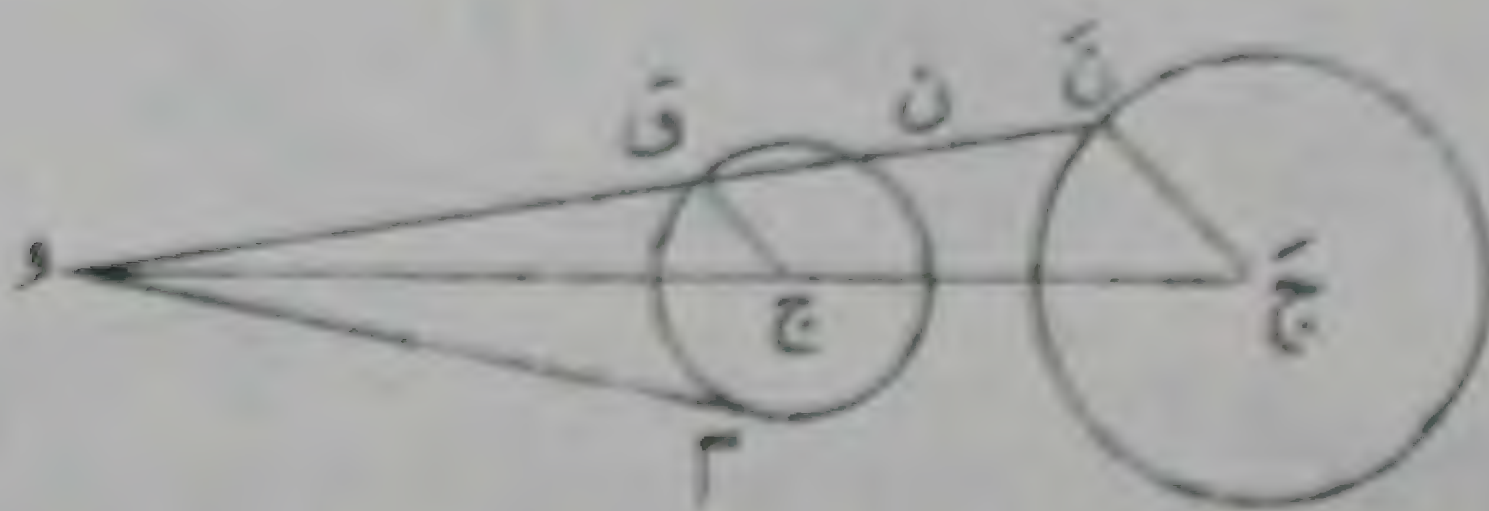
$$اس لیے \quad \angle QNQ' = \angle Q'QO$$

$$= زاویہ قائمہ$$

اس لیے NN' QQ' پر عمود وار ہے

پس N کا طریق خطِ مستقیم ہے جو مبداء میں سے گزرنے والے قطر پر عمود وار ہے۔

مثال ۳۔ دائرہ کا مقلوب معلوم کرو بلحاظ ایسے نقطہ کے جو محیط پر واقع نہیں ہوتا۔



و مبداء ہے، دیے ہوئے دائرہ کا مرکز ج ہے اور اس کے محیط پر کوئی نقطہ ن ہے
 فرض کرو کہ ن کا مقلوب ن ہے یعنی ون × ون = ک^۲
 ون دوبارہ دائرہ معلوم سے ق پر ملتا ہے، ق ج کو ملاؤ،
 دائرہ کا تماس وم کھینچو اور فرض کرو کہ وم = م
 تب ون × ون = ک^۲ اور ون × وق = م^۲

$$\text{اس لیے } \frac{\text{ون} \times \text{ون}}{\text{ون} \times \text{وق}} = \frac{\text{ک}^2}{\text{م}^2}$$

یعنی ون : وق = ک^۲ : م^۲
 ن ج کو ق ج کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ وج سے ج پر ملتا ہے۔
 تب وج : وج = ون : وق
 = ک^۲ : م^۲

اس لیے ج ثابت نقطہ ہے۔

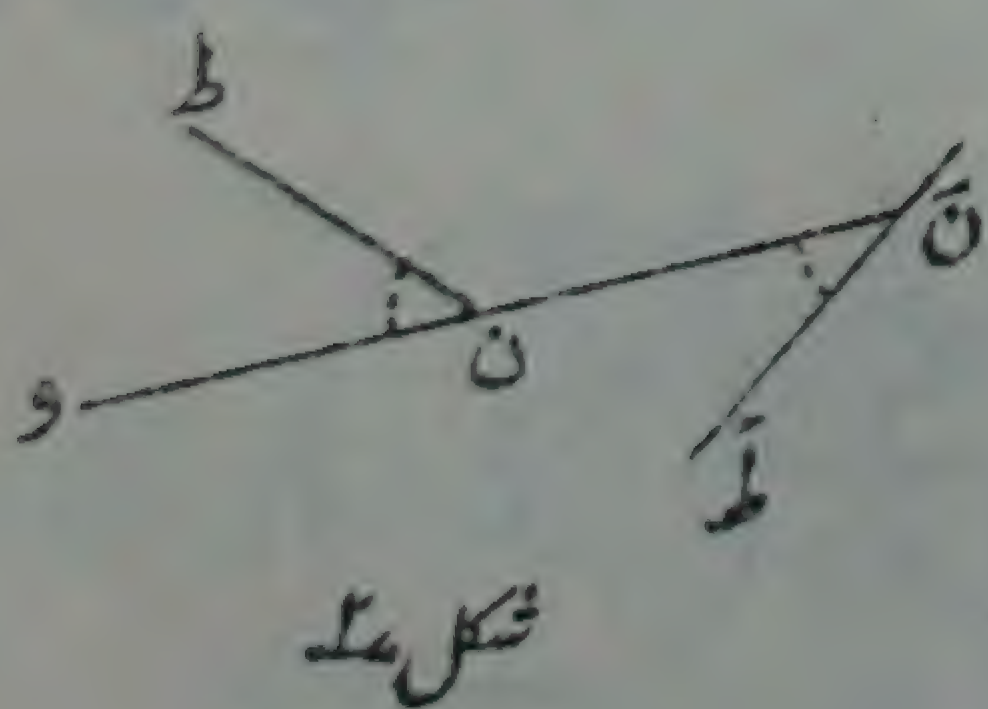
$$\text{نیز ج ن : ج ق = ون : وق} \\ = ک^2 : م^2$$

ج ن مستقل ہے اور ن کا طریق دائرہ ہے جس کا مرکز ج ہے۔

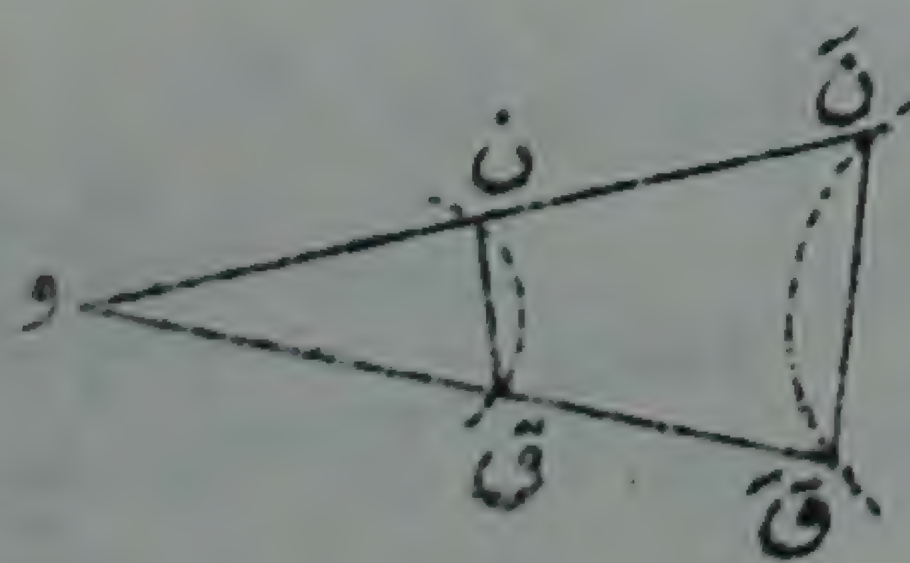
نتیجہ صریح۔ مبداء، دائرہ اور اس کے مقلوب کا مرکز مشابہت ہے۔

مثال ۴۔ تقلیب کے مبداء میں سے گزرنے والا کوئی خط مستقیم

دو مقلوب طریقوں کو ایک ہی زاویہ پر کاٹتا ہے جو خط کی متقابل جانبوں میں واقع ہوتے ہیں۔



شکل ۱



شکل ۲

فرض کر دو کہ ن اور ق دو نقطے طریق پر ہیں اور ن ، ق ان کے مقلوب ہیں
بجائے او کے ۔

تب ون × ون = ک

= وق × وق

اس لیے نقاط ن ، ن ، ق ، ق دائرہ کے محیط پر واقع ہوتے ہیں۔

اس لیے د وق ن = د ون ق

اب فرض کر دو کہ ق حرکت کرتے کرتے ن کے قریب آ جاتا ہے یعنی ق ن بالآخر
ن کے طریق کان پر تماس ہو جاتا ہے۔ ظاہر ہے کہ ساتھ ہی خط مستقیم ق ن ، ن کے
طریق کان پر تماس ہو جائیگا۔

اس لیے شکل ۱ میں اگر ن ط اور ن ط نقاط ن اور ن پر کے تماس
ہوں تو د ون ط = د ون ط یعنی خط ون ن ، ن اور ن کے طریقوں کو
خط ون ن کی مقابل کی جانبوں میں ایک ہی زاویہ پر کاٹتا ہے۔

نتیجہ صریح ۔ دو منحنیوں کے درمیان ان کے نقطہ تقاطع پر جو
زاویہ بنتے وہ مقلوب نقطہ پر ان کے مقلوبوں کے درمیانی زاویہ کے
مساوی ہوتا ہے، نیز اگر دو منحنی ن پر باہم مس کریں تو ان کے مقلوب
بھی مقلوب نقطہ ن پر مس کریں گے۔

مثال ۵۔ دو نقطوں کے مقلوبوں کے باہمی فاصلہ کو ان نقطوں
کے درمیانی فاصلہ کی رقوم میں اور ان معلومہ نقطوں کے جو فاصلے مبداء
سے ہیں ان کی رقوم میں معلوم کرو۔

[شکل ۱ مثال ۴] ن ، ق ، مقلوب ہیں بالترتیب ن اور ق کے

اس لیے ون × ون = ک = وق × وق

اور متشابہ مثلثوں ون ق اور وق ن سے

$$\frac{ن ق}{ن ق} = \frac{ون}{وق} = \frac{ون \times ون}{ون \times وق} = \frac{ک}{ون \times وق}$$

$$\text{اس لیے } \frac{\text{ک} \times \text{نق}}{\text{ون} \times \text{وق}} = \text{نق}$$

مشقین قلب سے متعلق

۱۔ و، ن، ق، ط ہم خط نقطے ہیں اور ن، ق، ط بالترتیب بلحاظ نقطہ و کے ن، ق، ط کے مقلوب ہیں، ثابت کرو کہ

(۱) اگر و، ن، ق، ط سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو و، ن، ق، ط سلسلہ موسیقیہ میں ہونگے۔

(۲) اگر و، ن، ق، ط سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو و، ن، ق، ط سلسلہ ہندسیہ میں ہونگے۔

۲۔ مثلث متساوی الساقین کے راس کو مبداء مان کر مثلث کے حاطہ دائرہ کا مقلوب معلوم کرو۔

۳۔ ثابت کرو کہ کسی نقطہ و کے لحاظ سے جس کو مبداء مانا جائے دائرہ خود اپنے آپ میں الٹ سکتا ہے۔

[و سے جو دائرہ کا حماس ہو ک کو اس کے طول کے برابر لو]

۴۔ ثابت کرو کہ دائرہ خود اپنے آپ میں منقلب ہو سکتا ہے اگر کسی علی القوائم دائرہ کے مرکز کو مبداء مانا جائے۔

۵۔ اب ایک دائرہ کا وتر ہے، اس کی تنصیف و پر ہوتی ہے، ثابت کرو کہ اگر و کو مرکز اور و ا کو قلب کا نیم قطر مانا جائے تو دائرہ خود اپنے آپ میں الٹ سکیگا۔

۶۔ ثابت کرو کہ کوئی دو دائرے خود اپنے آپ میں الٹائے جاسکتے ہیں۔

[ملاحظہ ہو مثال صفحہ ۱۲۹، مبداء و کو و ن پر لو اور و سے جو حماس ہے اُس کے طول کے مساوی ک فرض کرو]

۷۔ ثابت کرو کہ کوئی تین دائرے اپنے آپ میں الٹائے جاسکتے ہیں۔

[ملاحظہ ہو مثال ۲، صفحہ ۱۳۱]

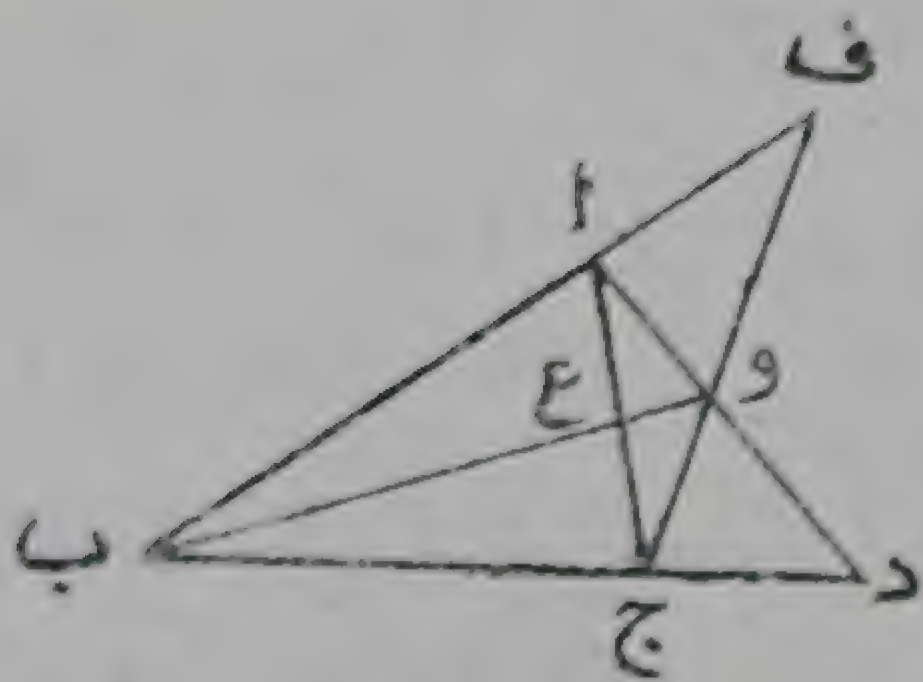
۸۔ خط مستقیم ایک دائرہ کو کاٹتا ہے، ثابت کرو کہ مبداء اور تقليب کے مستقل کے مناسب انتخاب سے ان میں سے کوئی ایک، دوسرے میں الٹایا جاسکتا ہے۔
 ۹۔ ثابت کرو کہ کوئی تین دائرے ایسے دائروں میں الٹائے جاسکتے ہیں جن کے مرکز ایک ہی خط میں واقع ہوں۔

[ملاحظہ ہو سوال ۳، صفحہ ۱۳۳، الٹانے کے مبداء کو علی القوائم دائرہ پر لو۔]
 ۱۰۔ ثابت کرو کہ ایک دائرے کے قطر ایسے ہم محور دائروں کے سلسلہ میں الٹائے جاسکتے ہیں جو دائرہ معلومہ کے مقلوب کے علی القوائم ہوں۔
 ۱۱۔ ن، ق، ط تین نقطے ترتیب وار ایک خط مستقیم پر ہیں، ذیل کے بیان کا مقلوب معلوم کرو۔

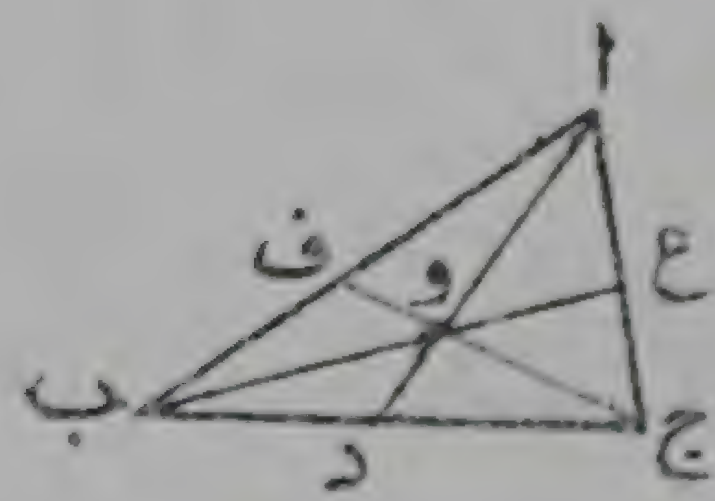
$$ن ق + ق ط = ن ط$$

۹۔ سیوا کا مسئلہ

مثبت کے واسوں میں سے تین ہم نقطہ خط کھینچ گئے ہیں جو مقام بل کے اضلاع سے ملتے ہیں، اگر اضلاع کے حصوں کو ایک ہی ترتیب میں لیا جائے تو ثابت کرو کہ کسی تین متبادل حصوں کا حاصل ضرب باقی تین متبادل حصوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔



شکل ۱



شکل ۲

فرض کرو کہ ا، د، ب، ع، ج، ف مثلث ا، ب، ج کے راسوں سے کھینچے گئے ہیں اور یہ ایک دوسرے کو و پر اور مقابل کے اضلاع کو د، ع، ف پر کاٹتے ہیں یہ ثابت کرنا ہے کہ

$$ب د \times ج ع \times ا ف = د ج \times ا ع \times ف ب$$

مثلثوں ا، و، ب، ا، و، ج کا قاعدہ ا، و مشترک ہے اور ب اور ج سے ا، د پر عمود گرائے سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$ب د : د ج = ا و ب کا ارتفاع : ا و ج کا ارتفاع$$

$$\frac{ب د}{د ج} = \frac{ا و ب کا ارتفاع}{ا و ج کا ارتفاع}$$

$$\frac{ج ع}{ا ع} = \frac{ا و ب کا ارتفاع}{ا و ج کا ارتفاع}$$

اسی طرح سے

$$\frac{ا ف}{ف ب} = \frac{ا و ب کا ارتفاع}{ا و ج کا ارتفاع}$$

اور

ان نسبتوں کو باہم ضرب دینے سے

$$1 = \frac{ا ف}{ف ب} \times \frac{ج ع}{ا ع} \times \frac{ب د}{د ج}$$

$$یعنی ب د \times ج ع \times ا ف = د ج \times ا ع \times ف ب$$

اس مسئلہ کا عکس جو ا لٹے عمل سے ثابت ہو سکتا ہے نہایت ضروری ہے۔

اس کا دعویٰ یہ ہے۔

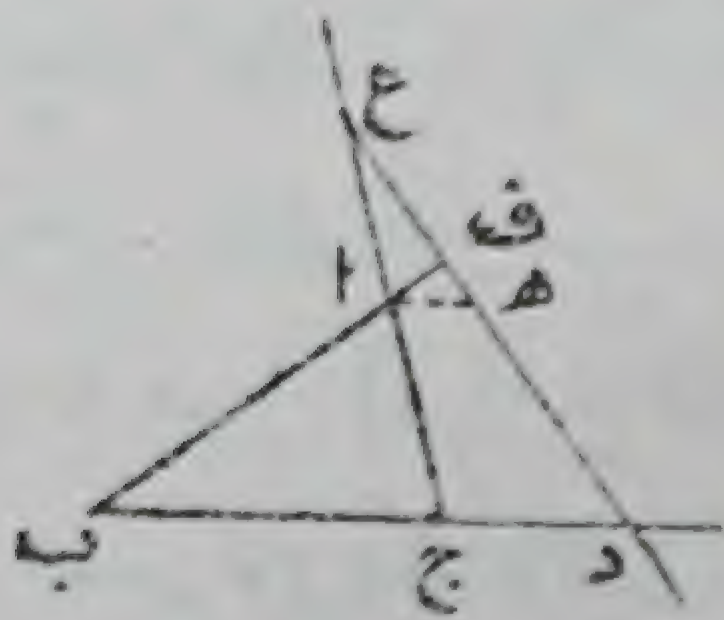
اگر مثلث کے راسوں میں سے تین خط کھینچے جائیں جو مقابل کے اضلاع کو ایسے حصوں میں تقسیم کریں کہ ترتیب وار کسی تین متبادل حصوں کا حاصل ضرب باقی کے تین حصوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہو تو یہ تینوں خط ہم نقطہ ہوں گے۔

$$یعنی اگر ب د \times ج ع \times ا ف = د ج \times ا ع \times ف ب$$

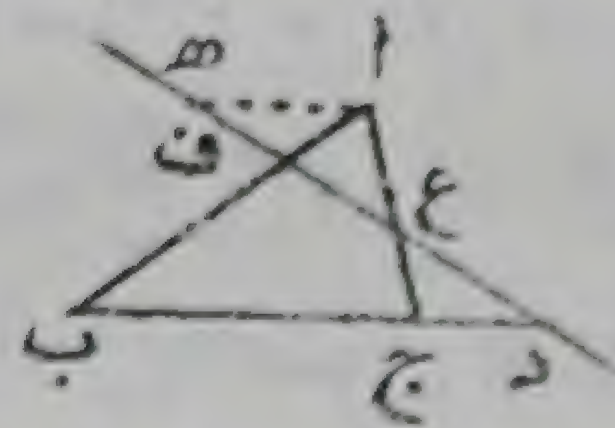
تو ا، د، ب، ع، ج، ف ہم نقطہ ہوں گے۔

۱۰۔ مینی لاس کا مسئلہ

اگر ایک خط مستقیم (قاطع) مثلث کے تین اضلاع کو یا اضلاع
مخروجہ کو کاٹے تو ترتیب وار تین متبادل حصوں کا حاصل ضرب،
باقی تین حصوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا۔



شکل ۱



شکل ۲

دیا ہوا مثلث AB ج ہے، اور قاطع خط اضلاع B ج، ج ا، ا ب
سے یا اضلاع مخروجہ سے بالترتیب د، ع، ف پر ملتا ہے۔
یہ ثابت کرنا ہے کہ

$$ب د \times ج ع \times ا ف = د ج \times ع ا \times ف ب$$

اھ کو ب ج کے متوازی کھینچو اور اتنا بڑھاؤ کہ یہ قاطع سے ھ پر ملے۔

تشابہ مثلثوں د ف ب، ھ ا ف سے

$$\frac{اھ}{ب د} = \frac{ا ف}{ف ب}$$

اور متشابہ مثلثوں د ج ع، ھ ا ع سے

$$\frac{ج ع}{ا ع} = \frac{ج د}{اھ}$$

$$\text{اس لیے ضرب دینے سے } \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = \frac{\text{ج د}}{\text{ب د}}$$

$$\frac{\text{ب د} \times \text{ج ع} \times \text{ا ف}}{\text{د ج} \times \text{ع ا} \times \text{ف ب}} = 1$$

یعنی

$$\text{یا } \text{ب د} \times \text{ج ع} \times \text{ا ف} = \text{د ج} \times \text{ع ا} \times \text{ف ب}$$

نوٹ - اس مسئلہ میں قاطع کو دو اضلاع سے اور تیسرے ضلع محدودہ سے ملنا چاہیے (شکل ۱۔) یا تینوں اضلاع محدودہ سے ملنا چاہیے (شکل ۲۔)۔
اس مسئلہ کا عکس الٹ ثبوت سے حاصل ہو سکتا ہے۔

اگر تین نقطے بالترتیب مثلث کے دو اضلاع پر اور تیسرے ضلع محدودہ پر یا تینوں اضلاع محدودہ پر لیے جائیں اور یہ نقطے اضلاع کو اس طرح تقسیم کریں کہ ترتیب وار تین متبادل حصوں کا حاصل ضرب مساوی ہو باقی تین حصوں کے حاصل ضرب کے تو یہ نقطے ہم خط ہونگے۔

تعریفیں

- ۱۔ اگر دو مثلث ایسے ہوں کہ ان کے متناظر ااسوں کے ملانے والے تین خط ہم نقطہ ہوں تو ان کو ہم قطبی کہتے ہیں۔
- ۲۔ اگر دو مثلث ایسے ہوں کہ ان کے متناظر اضلاع کے تین نقاط تقاطع ہم خط ہوں تو مثلثوں کو ہم محور کہتے ہیں۔

مشقیں

- ۱۔ سیوا کے مسئلہ کی مدد سے مثلث کی مندرجہ ذیل خاصیتیں ثابت کرو۔
(۱) اضلاع کے وسطی نقاط سے اضلاع پر جو عمود کھینچے جائیں وہ ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔
- (۲) زاویوں کے منصف ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔

(۳) مثلث کے وسطی خطوط (دسلانے) ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔
 ۲۔ مثلث کا اندرونی دائرہ اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کو بالترتیب د، ع، ف پر سر کرنا ہے۔ اگر ع، ف، ف د، د ع بالترتیب ان اضلاع سے ن، ق، ط پر ملیں تو ثابت کرو کہ ن، ق، ط ہم خط ہیں۔
 ۳۔ مثال ۲ کی ترقیم کے مطابق ثابت کرو کہ ب، د، ج، ن موسیقی صف بناتے ہیں۔

۴۔ اگر مثلث ا ب ج کے حائل دائرہ کے تماس نقاط ا، ب، ج پر کھینچے جائیں اور یہ مقابل کے اضلاع سے بالترتیب د، ع، ف پر ملیں تو ثابت کرو کہ

ب د : ج د = ب ا : ج ا
 اس سے ثابت کرو کہ د، ع، ف ہم خط ہیں۔

۵۔ وہ خط جو مثلث کے راسوں کو اندرونی دائرہ (یا تین خارجی دائروں میں سے کسی دائرہ) کے نقاط تماس سے ملاتے ہیں ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

۶۔ مکمل ذو اربعۃ الاضلاع کے قطروں کے وسطی نقاط ہم خط ہوتے ہیں۔ [ملاحظہ ہو تعریف ۴ صفحہ ۱۱۶]

۷۔ ثابت کرو کہ مکمل ذو اربعۃ الاضلاع کے کوئی دو قطر تیسرے قطر کی موسیقی تقسیم کرتے ہیں۔

۸۔ ہم قطبی مثلث ہم محور بھی ہوتے ہیں اور برعکس اس کے ہم محور مثلث ہم قطبی بھی ہوتے ہیں۔

۹- تین دائروں کے چھ مشابہت کے مرکز ہونگے، ثابت کرو کہ ان میں سے تین تین مل کر چار خطوط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں۔



مشقیں - صفحہ ۴۵

- ۱۔ ۱۴۰ میٹر، ۱۶ میٹر، ۱۲۵ میٹر ۲۔ $\frac{1}{4}$ ۱۲ گز
 ۳۔ $\frac{1}{4}$ ۲۲ میل ۴۔ ۳۰ فٹ، ۴۰ فٹ
 ۵۔ ۲۴ فٹ، ۲ فٹ ۶۔ انچ ۷۔ ۶۰ فٹ
 ۸۔ ۱۰۶ فٹ ۹۔ ۷۲ فٹ

مشقیں - صفحہ ۵۴

- ۱۔ ۵۲ ۲۔ ۵۱ : ۳۸ تقریباً

مشقیں - صفحہ ۵۹

- ۱۔ ۱۰۶۵ مربع انچ ۲۔ ۳۶۰ سنتی میٹر
 ۳۔ ۶۴ مربع سنتی میٹر ۴۔ ۱۱۰
 ۵۔ ۳۳۶ ایکڑ

مشقیں - صفحہ ۶۱

- ۱۔ ۴۹ سنتی میٹر ۲۔ ۸۶۰ سنتی میٹر

مشقیں - صفحہ ۶۲

- ۱۔ $\frac{1}{9}$ ۲۔ ۲۰ مربع فٹ ۳۔ ۱۰ مربع سنتی میٹر
 ۴۔ ۵ : ۷ ۵۔ ۵۶۵

مشقیں - صفحہ ۶۸

- ۱۔ ۴۶ ر، ۳۳ ر، ۵۴ ر ۲۔ ۹ فٹ ۳۔ ۱۳ انچ

- ۳ - ۶۵ ر ۳ مربع سنتی میٹر
 ۵ - ۴۵ ر ۴ سنتی میٹر
 ۶ - ۳۵ ر ۶ سنتی میٹر
 ۷ - ۱۵ ر ۸ مربع اینچ
 ۸ - ۹۰ ایکڑ
 ۹ - ۵۱۲ ایکڑ
 ۱۰ - ۱ سنتی میٹر ۱۵ میٹروں کو تعبیر کرتا ہے۔

مشقیں - صفحہ ۶۹

- ۱ - ۱ : ۳۶
 ۲ - ۱ : ۳۶
 ۳ - ۱ : ۳۶
 ۴ - ۱ : ۳۶
 ۵ - ۱ : ۳۶
 ۶ - ۱ : ۳۶

مشقیں - صفحہ ۷۲

- ۱ - ۳۵ ر ۳ مربع سنتی میٹر
 ۲ - ۳۵ ر ۳ مربع سنتی میٹر
 ۳ - ۳۵ ر ۳ مربع سنتی میٹر
 ۴ - ۳۵ ر ۳ مربع سنتی میٹر
 ۵ - ۳۵ ر ۳ مربع سنتی میٹر
 ۶ - ۳۵ ر ۳ مربع سنتی میٹر

مشقیں - صفحہ ۷۵

- ۱ - ۱ : ۳۶
 ۲ - ۱ : ۳۶
 ۳ - ۱ : ۳۶
 ۴ - ۱ : ۳۶
 ۵ - ۱ : ۳۶
 ۶ - ۱ : ۳۶

مشقیں - صفحہ ۷۸

- ۱ - ۱۱ ر ۵۴ مربع اینچ
 ۲ - ۱۱ ر ۵۴ مربع اینچ
 ۳ - ۱۱ ر ۵۴ مربع اینچ
 ۴ - ۱۱ ر ۵۴ مربع اینچ
 ۵ - ۱۱ ر ۵۴ مربع اینچ
 ۶ - ۱۱ ر ۵۴ مربع اینچ

مشقیں - صفحہ ۸۳

- ۱ - ۱ : ۳۶
 ۲ - ۱ : ۳۶
 ۳ - ۱ : ۳۶
 ۴ - ۱ : ۳۶
 ۵ - ۱ : ۳۶
 ۶ - ۱ : ۳۶

مشقیں - صفحہ ۹۵

- ۱- ۱۵ (۸، ۶) ۲- ۱۵ (۲، ۴) (۵، ۱۰)
 ۳- ۱۸۳ ۴- ۱۱۱۴
 ۶- ۱۵۵ ۷- ۱۹۳

مشقیں - صفحہ ۱۰۱

- ۱- ۱۵۱۲ مربع سنٹی میٹر ۲- ۸۱۵۵
 ۳- ۲۲۱۳۰ مربع سنٹی میٹر ۴- ۹۰
 ۸- ۱۸۳، ۱۴، ۱
 ۱۰- ۲۰۱۴۸ مربع سنٹی میٹر ۲۰۱۸ سنٹی میٹر
 ۱۲- ۵۶ ۱۳- ۱۱۲، ۱۲، ۲۲
 ۱۵- ۶۳ فٹ ۱۶- ۱۸ مربع سنٹی میٹر
 ۱۷- ۶۰، ۱۰، ۱۰ مربع سنٹی میٹر

مشقیں - صفحہ ۱۰۸

۱- ۱۴، ۱۶ سنٹی میٹر ۲۵	۵۵	۶۰	۴۵	۳۰	۱۵	۵
ن	۸۱۳	۹۱۲	۱۱۱۳	۱۶۱۰	۳۰۱۹	۳۰۱۹

- ۲- ۱۱ (۱) ۸۱۹ مربع سنٹی میٹر (۲) ۴۲ (۳) ۱۰۸ (۴) علی التوائم
 ۳- جب سلخ کا میلان پٹریوں کے ساتھ مساوی ہو۔
 ۴- جب ن 'ا' ب کا وسطی نقطہ ہو تو (۱) اعظم ہے (۲) اقل ہے۔
 ۵- اقل جبکہ ۲ = ۳ ۶- ۴۵
 ۷- ۳۰۳ ۸- ۹

مشقیں - صفحہ ۱۱۴

۲ - (۱) ۶۵۰ (۲) ۱۶۲ سنتی میٹر

مشقیں - صفحہ ۱۲۰

۱ - ۴۵۰ سنتی میٹر، ۸۵۸ سنتی میٹر

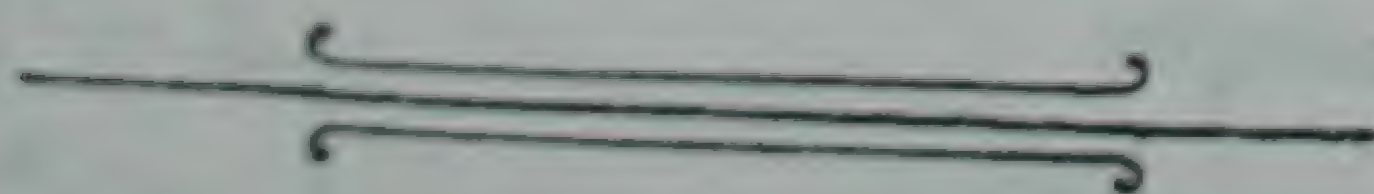
۲ - (۱) ۱۶۲۰ (۲) ۱۶۹۳

اصطلاحات فہرست

(علم ہندسہ)

Antecedent (ratio)	مقدم (نسبت)
Arithmetical progression	سلسلہ حسابیہ
Componendo (ratio)	ترکیب (نسبت)
Consequent (ratio)	موخر (نسبت)
Cosecant	قاطع التمام
Cosine	جیب التمام
Cotangent	ماس التمام
Dividendo	تفصیل نسبت
Equiangular triangles	متساوی الزوا یا مثلث
Extreme and mean ratio	انتہائی اور وسطی نسبت
Geometrical progression	سلسلہ ہندسیہ
Harmonic conjugates	موسیقی مزدوج
Harmonic progression	سلسلہ موسیقیہ
Harmonic Section	موسیقی تقسیم
Homothetic figures	ہم وضع اشکال
Incommensurable	متبائن
Inversion	تقلیب
Maxima and minima	اعظم اور اقل قیمتیں

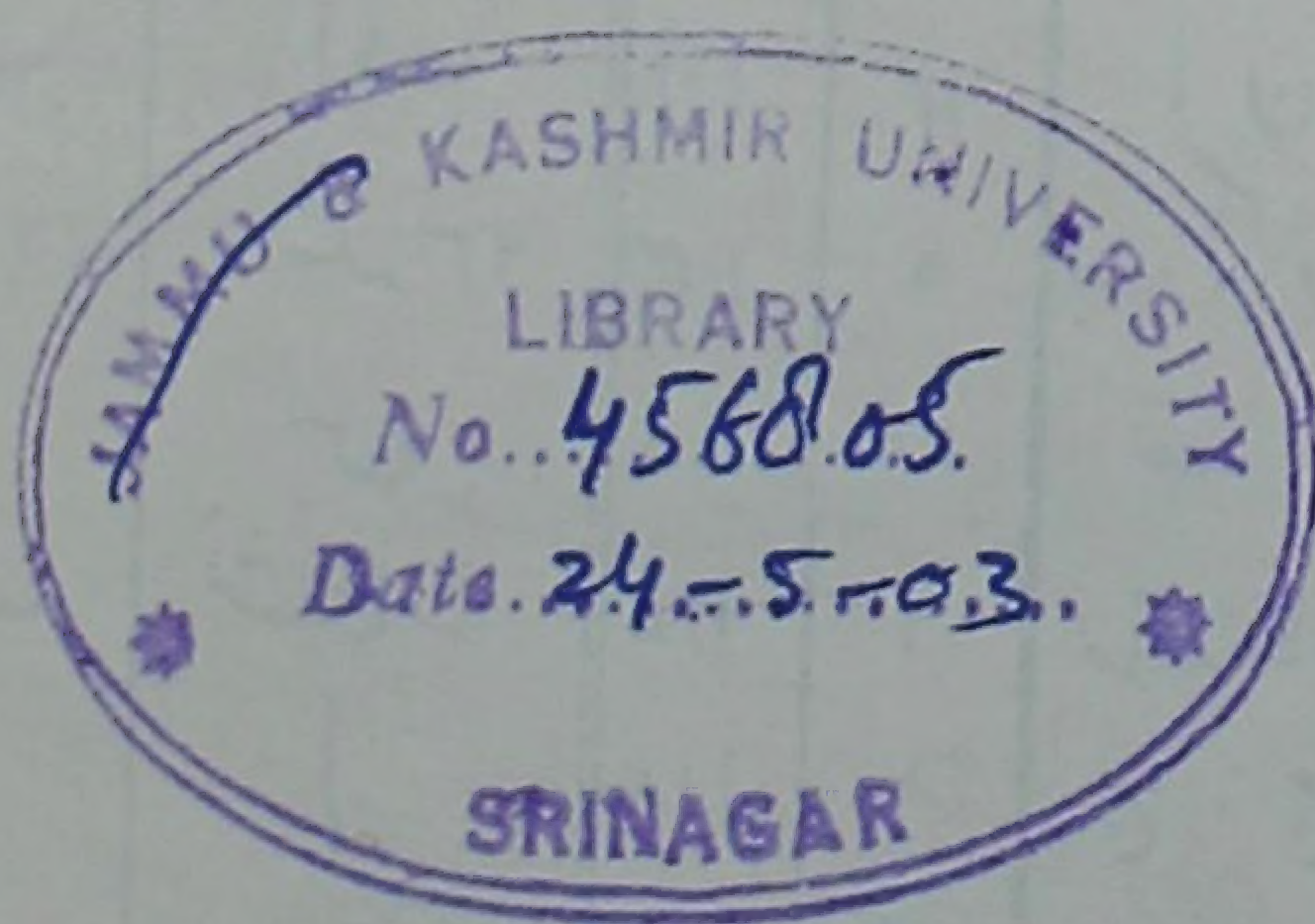
Pencil	پنسل
Polar	قطبی
Pole	قطب
Proportion	تناسب
Ptolemy's Theorem	بطليموس کا مسئلہ
Radical axis	بنیادی محور
Range	صف
Secant	قاطع
Similar figures	متشابه اشکال
Similitude (centre of)	مشابہت (کا مرکز)
Sine	جیب
Tangent	ماس
Transversal	قاطع خط
Trigonometrical ratios	مثلثی نسبتیں



اغلاط نامہ

ہندسہ مستوی حصہ پنجم
(طبع ثانی)

غلط	صحیح	غلط	صحیح	غلط	صحیح	غلط	صحیح
پیشانی	ہندسہ	پیشانی	ہندسہ	پیشانی	ہندسہ	پیشانی	ہندسہ
شکل	و	شکل	ر	شکل	و	شکل	ر
۱۳	۱۳	۱۳	۱۳	۱۳	۱۳	۱۳	۱۳
۲۵	۲۵	۲۵	۲۵	۲۵	۲۵	۲۵	۲۵
۳۲	۳۲	۳۲	۳۲	۳۲	۳۲	۳۲	۳۲
۳۴	۳۴	۳۴	۳۴	۳۴	۳۴	۳۴	۳۴
۳۶	۳۶	۳۶	۳۶	۳۶	۳۶	۳۶	۳۶
۵۵	۵۵	۵۵	۵۵	۵۵	۵۵	۵۵	۵۵
۵۶	۵۶	۵۶	۵۶	۵۶	۵۶	۵۶	۵۶
۶۳	۶۳	۶۳	۶۳	۶۳	۶۳	۶۳	۶۳
۶۰	۶۰	۶۰	۶۰	۶۰	۶۰	۶۰	۶۰
۸۶	۸۶	۸۶	۸۶	۸۶	۸۶	۸۶	۸۶
۹۲	۹۲	۹۲	۹۲	۹۲	۹۲	۹۲	۹۲
۹۶	۹۶	۹۶	۹۶	۹۶	۹۶	۹۶	۹۶





**ALLAMA
IQBAL LIBRARY**

UNIVERSITY OF KASHMIR
HELP TO KEEP THIS BOOK
FRESH AND CLEAN